

Топологический переход в спектре магнонов скирмионного кристалла

В. Е. Тимофеев, Ю. В. Барамыгина, Д. Н. Аристов

*НИЦ «Курчатовский институт» - ПИЯФ, Гатчина
Санкт-Петербургский Государственный Университет, Санкт-Петербург*

Тимофеев В. Е., Барамыгина Ю. В., Аристов Д. Н. Топологический переход в спектре магнонов скирмионного кристалла. // Письма в ЖЭТФ. – 2023. – Т. 118. – №. 12. – С. 908-914.

6 июня 2024

Модель

2D ферромагнетик с взаимодействием Дзялошинского-Мории и внешним магнитным полем

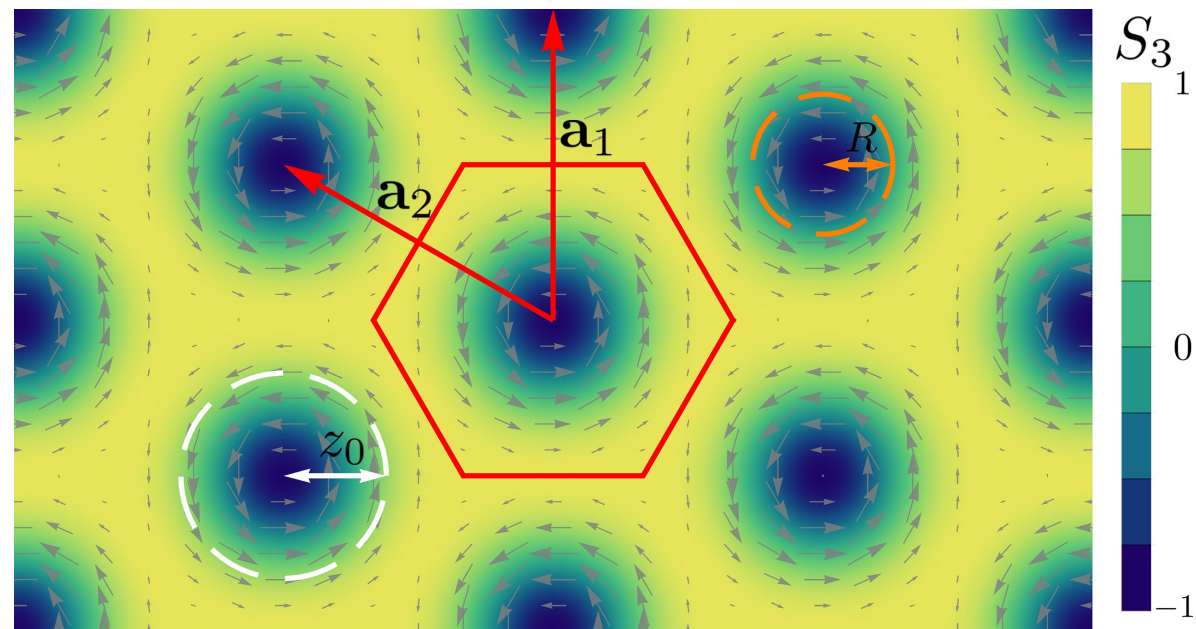
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}C(\nabla\mathbf{S})^2 + D\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{S} - B S_z$$

C – константа обменного взаимодействия
 D – константа Дзялошинского-Мории
 B – внешнее магнитное поле

$$l = \frac{C}{D} \quad \Downarrow \quad b = \frac{BC}{SD^2}$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{S})^2 + \mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{S} - b S_z$$

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n}, \quad |\mathbf{n}| = 1$$



Метод стереографической проекции

$$n_1 + i n_2 = \frac{2f}{1 + f\bar{f}}, \quad n_3 = \frac{1 - f\bar{f}}{1 + f\bar{f}}$$

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n} \quad |\mathbf{n}| = 1$$

f – комплекснозначная функция

Стереографическая функция
одионого скирмиона

$$f_1 = \frac{i z_0 \kappa(z\bar{z}/z_0^2)}{\bar{z}}$$

$$z = x + iy$$

Стереографическая функция скирмионного кристалла:

$$f_{\text{SkX}}(a, z_0) = \sum_{n,m} f_1(\mathbf{r} - n\mathbf{a}_1 - m\mathbf{a}_2)$$

Векторы гексагональной решётки:

$$\mathbf{a}_1 = (0, a), \quad \mathbf{a}_2 = (-\sqrt{3}a/2, a/2)$$

a - параметр ячейки скирмионного кристалла

Нормальные моды флуктуаций

$$f(t, z, \bar{z}) = f_0(z, \bar{z}) + \delta f(t, z, \bar{z})$$

Вторая вариация лагранжиана

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f_0 + \delta f] &= \mathcal{L}[f_0] + \delta f \mathcal{L}_1[f_0] \\ &+ \frac{1}{2} \delta f \delta f \mathcal{L}_2[f_0] + \dots \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\bar{\psi}, \psi) \left(-i \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & -\partial_t \end{pmatrix} - \hat{\mathcal{H}} \right) \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$$

Удобно ввести функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} (-i\nabla + \mathbf{A})^2 + U & V \\ V^* & (i\nabla + \mathbf{A})^2 + U \end{pmatrix}$$

$$f = f_0 + \delta f \equiv f_0 + (1 + f_0 \bar{f}_0) \psi$$

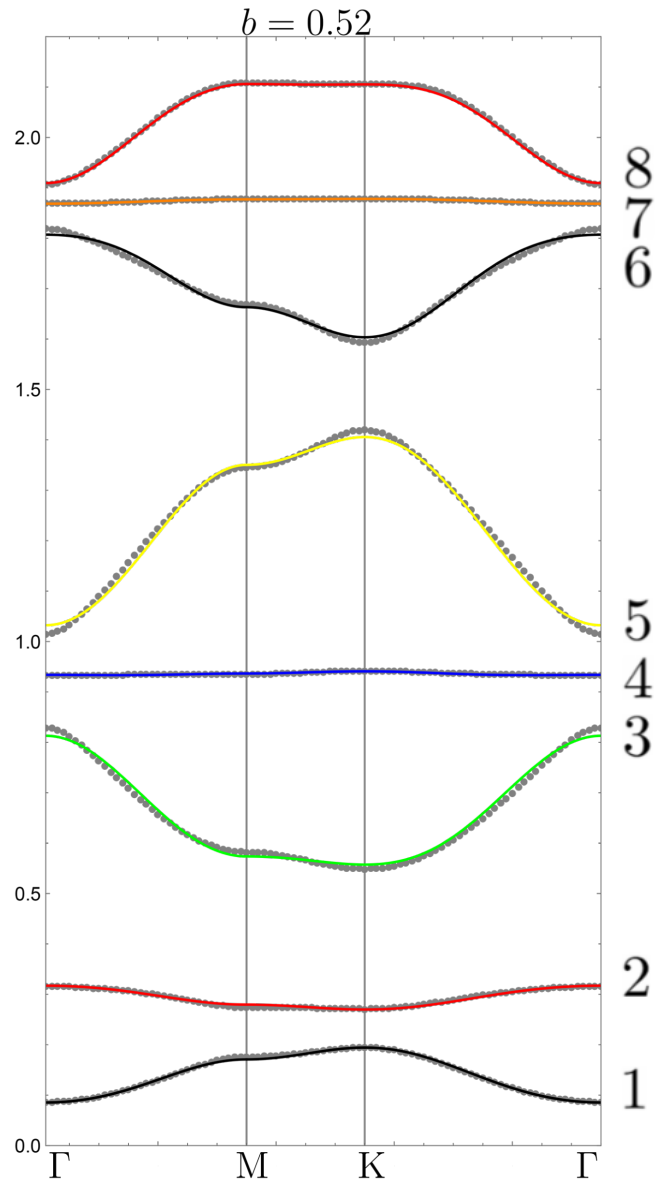
Уравнение Эйлера-Лагранжа

$$-i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sigma_3 \hat{\mathcal{H}} \begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix}$$

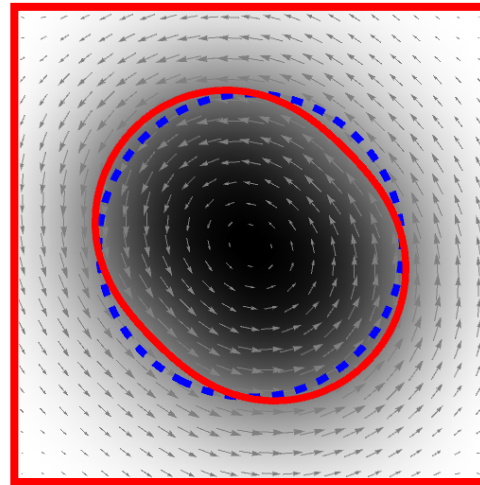
Нормальные моды

$$\left(\epsilon_n \sigma_3 - \hat{\mathcal{H}} \right) \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = 0$$

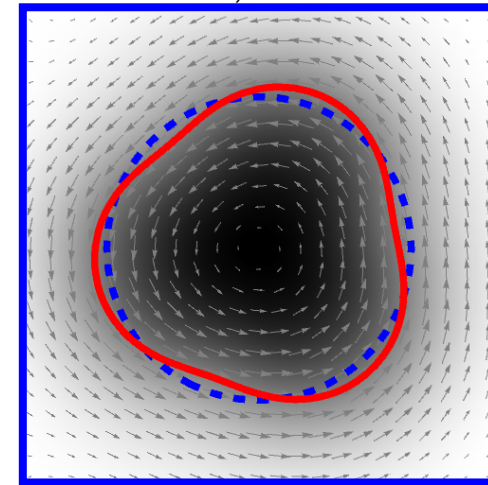
Спектр скирмионного кристалла



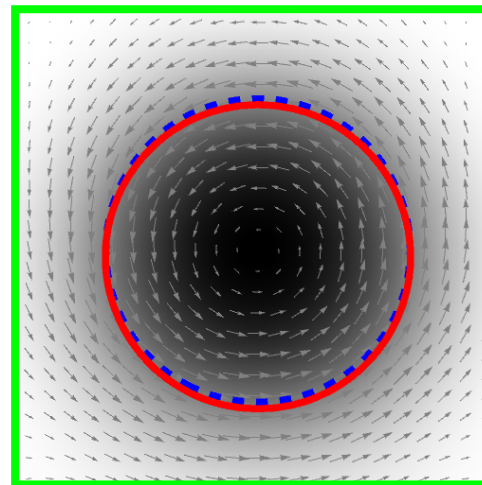
$$n = 2, m = 3$$



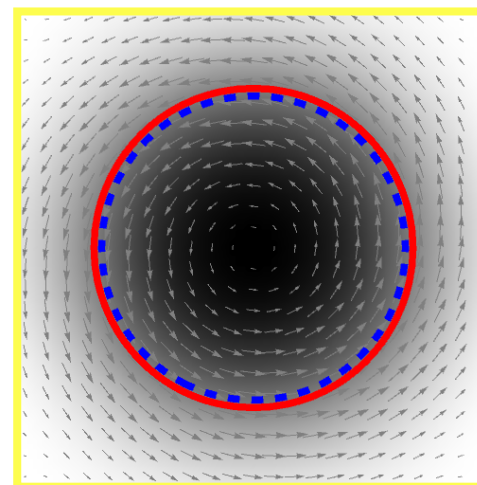
$$n = 4, m = 4$$



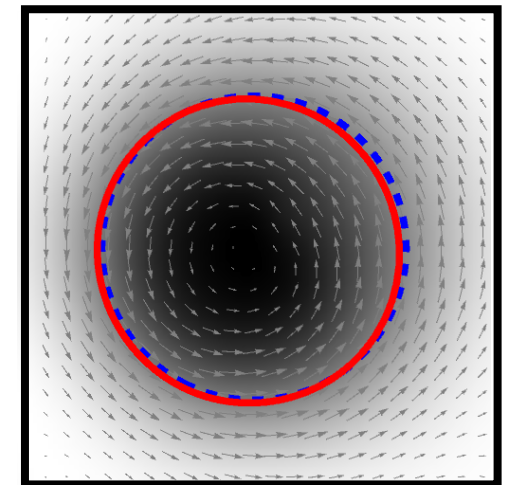
$$n = 3, m = 0$$



$$n = 5, m = 1$$



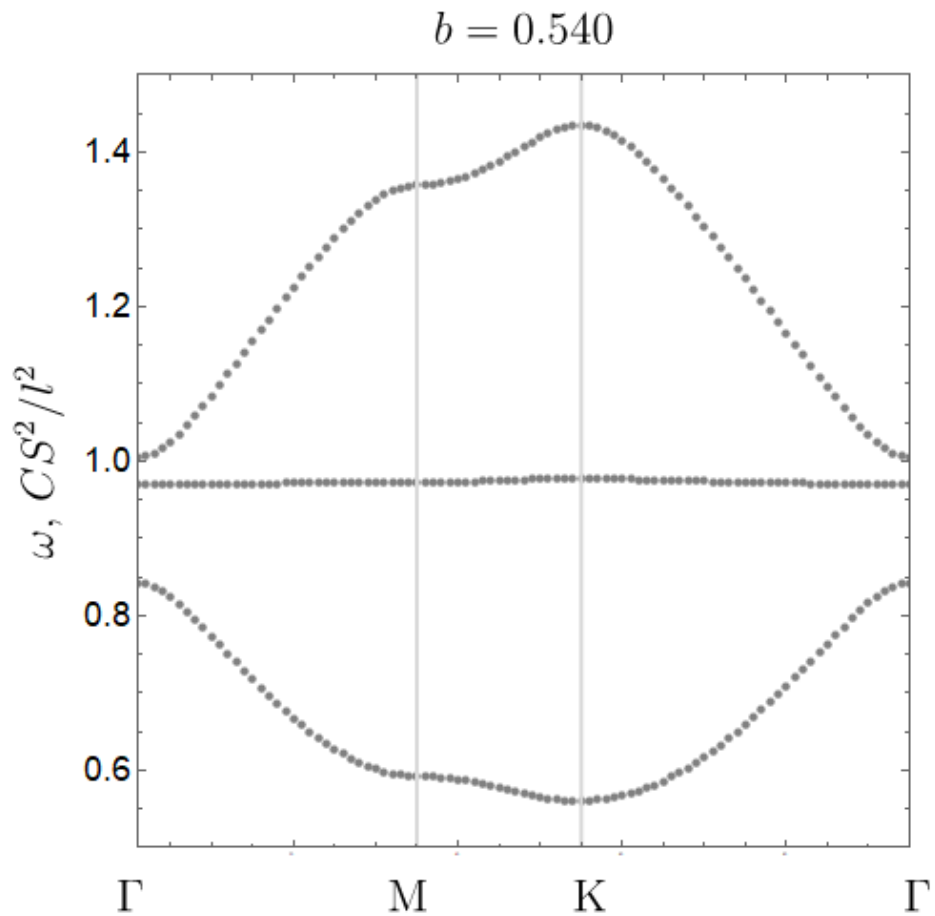
$$n = 6, m = 2$$



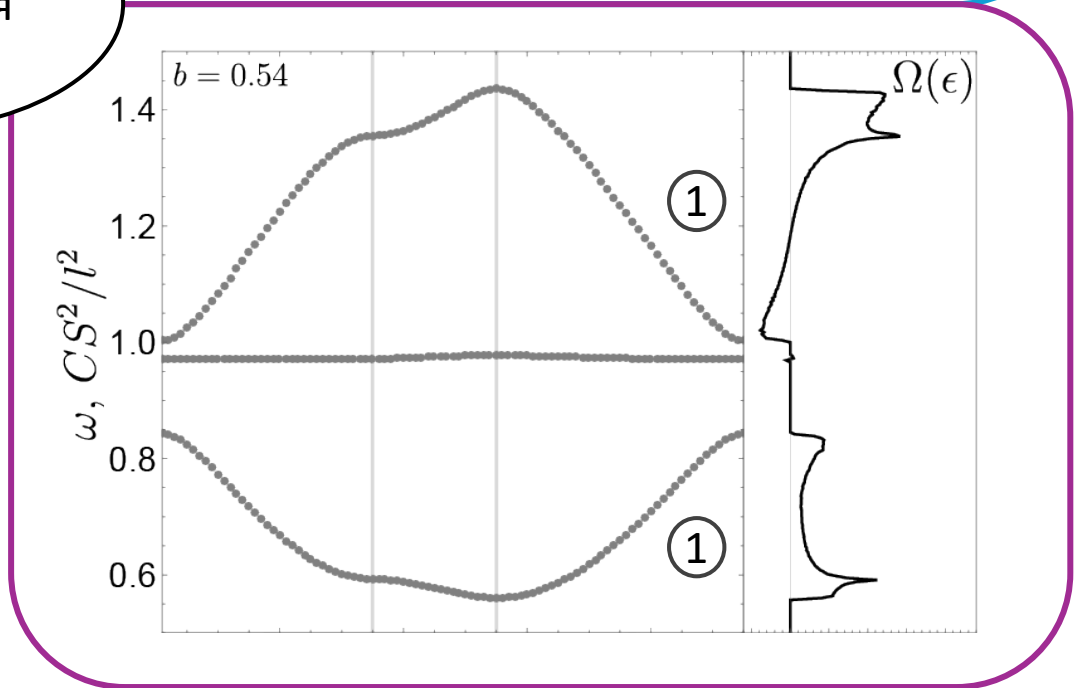
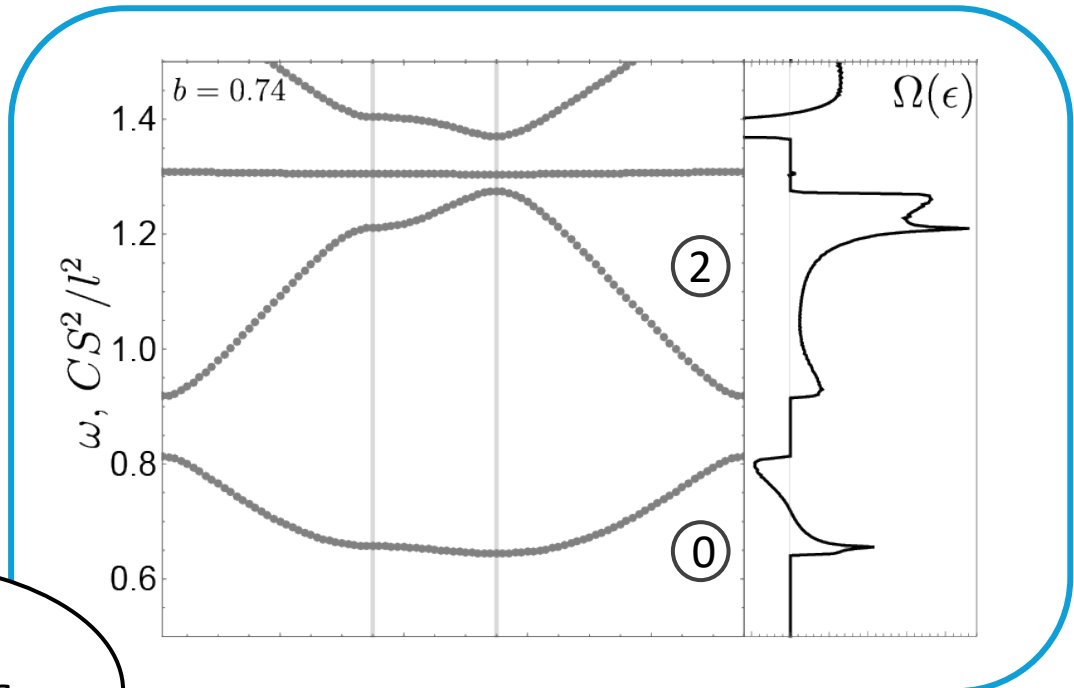
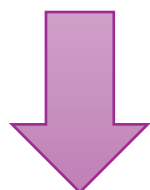
CCW

BR

CW



Щель
закрывается
при $b=0.66$



Кривизна Берри

$$\Omega_n(\mathbf{q}) = i \sum_m \frac{\langle n | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_x} | m \rangle \langle m | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_y} | n \rangle - (q_x \leftrightarrow q_y)}{(\epsilon_{n\mathbf{q}} - \epsilon_{m\mathbf{q}})^2}$$

Гиротропная мода

$$f_{SkX} = \sum_l f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)} + \mathbf{u}_l), \quad \mathbf{r}_l^{(0)} = n\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2$$

$$f_{SkX} = f_0 + \sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) \implies \sum_l \mathbf{u}_l \nabla f_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_l^{(0)}) = (1 + f_0 \bar{f}_0) \psi(\mathbf{r})$$

$$\begin{pmatrix} \psi \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} = \sum_j \mathcal{O}_j \begin{pmatrix} u_j^- \\ u_j^+ \end{pmatrix}, \quad u_j^\pm = u_j^x \pm i u_j^y$$

Квадратичная часть лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{lj} \begin{pmatrix} u_l^+ & u_l^- \end{pmatrix} \left(-i\hat{\mathcal{K}}_{lj} \partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{lj} \right) \begin{pmatrix} u_j^- \\ u_j^+ \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{lj} = \int d\mathbf{r} \mathcal{O}_l^\dagger \cdot \sigma_3 \cdot \mathcal{O}_j$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{lj} = \int d\mathbf{r} \mathcal{O}_l^\dagger \cdot \hat{\mathcal{H}} \cdot \mathcal{O}_j$$

Две вышележащие моды

Гиротропная мода

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{u}) \approx f(\mathbf{r}) + u \partial_z f(\mathbf{r}) + \bar{u} \partial_{\bar{z}} f(\mathbf{r})$$



$$u_{br} z \partial f_1(\mathbf{r}) / \partial z + \bar{u}_{br} \bar{z} \partial f_1(\mathbf{r}) / \partial \bar{z}$$

$$u_{ccw} z^2 \partial f_1(r) / \partial z + \bar{u}_{ccw} \bar{z}^2 \partial f_1(r) / \partial \bar{z}$$

$$\Psi_{\mathbf{q}}^\dagger = \left(\bar{u}_{br,\mathbf{q}}, u_{br,\mathbf{q}}, \bar{u}_{ccw,\mathbf{q}}, u_{ccw,\mathbf{q}} \right)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \Psi_{-\mathbf{q}}^\dagger \left(-i \hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} \partial_t - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} \right) \Psi_{\mathbf{q}}$$

$$\hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 1 + k_2 \gamma_s, & 0, & k_a \gamma_p^*, & k_b \gamma_p \\ 0, & -1 - k_2 \gamma_s, & k_b \gamma_p^*, & k_a \gamma_p \\ k_a \gamma_p, & k_b \gamma_p, & 1 + k_3 \gamma_s, & 0 \\ k_b \gamma_p^*, & k_a \gamma_p^*, & 0, & -1 - k_3 \gamma_s \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} p_1 + t_1 \gamma_s, & p_2 + t_2 \gamma_s, & -t_a \gamma_p^*, & t_b \gamma_p \\ p_2 + t_2 \gamma_s, & p_1 + t_1 \gamma_s, & -t_b \gamma_p^*, & t_a \gamma_p \\ -t_a \gamma_p, & -t_b \gamma_p, & p_3 + t_3 \gamma_s, & t_4 \gamma_d \\ t_b \gamma_p^*, & t_a \gamma_p^*, & t_4 \gamma_d^*, & p_3 + t_3 \gamma_s \end{pmatrix}$$

$$\det(\hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}}) = 0, \text{ где } \hat{\mathcal{L}}_{\mathbf{q}} = \omega \hat{\mathcal{K}}_{\mathbf{q}} - \hat{\mathcal{H}}_{\mathbf{q}}$$

$$\omega = \pm \epsilon_1(\mathbf{q}) \text{ и } \omega = \pm \epsilon_2(\mathbf{q})$$

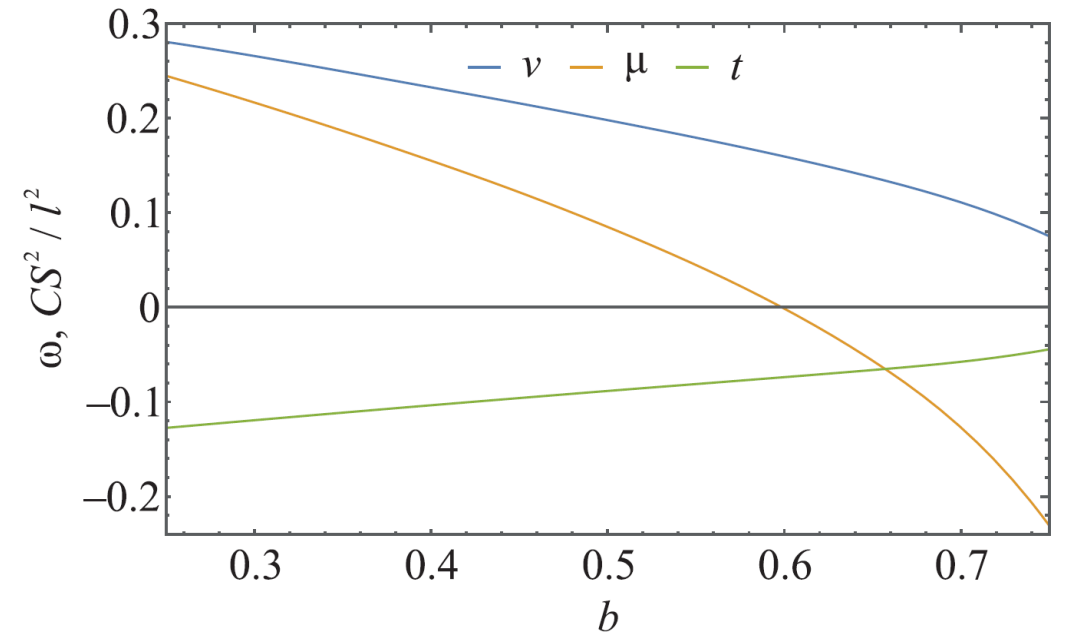
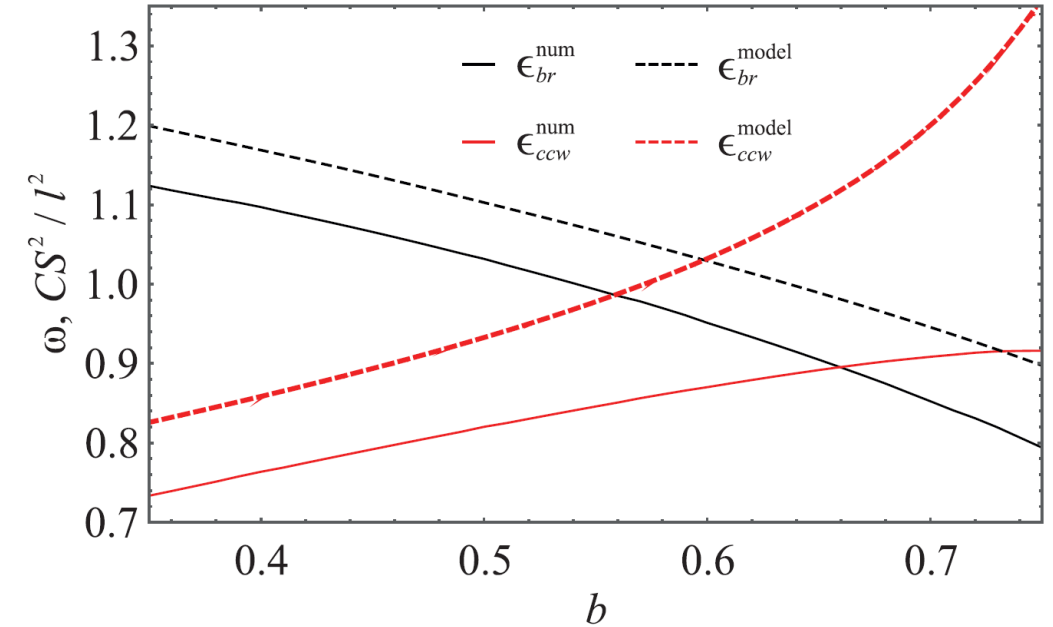
При $\mathbf{q} = 0$ энергии даются выражениями:

$$\epsilon_1 = (p_1^2 - p_2^2)^{1/2}, \quad \epsilon_2 = p_3.$$

Эффективный гамильтониан вблизи $\mathbf{q} = 0$:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mu + tq^2, & v(q_x - iq_y) \\ v(q_x + iq_y), & -\mu - tq^2 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{\pm, \mathbf{q}} = E_0 \pm \sqrt{(\mu + tq^2)^2 + v^2 q^2}$$



Топологический переход

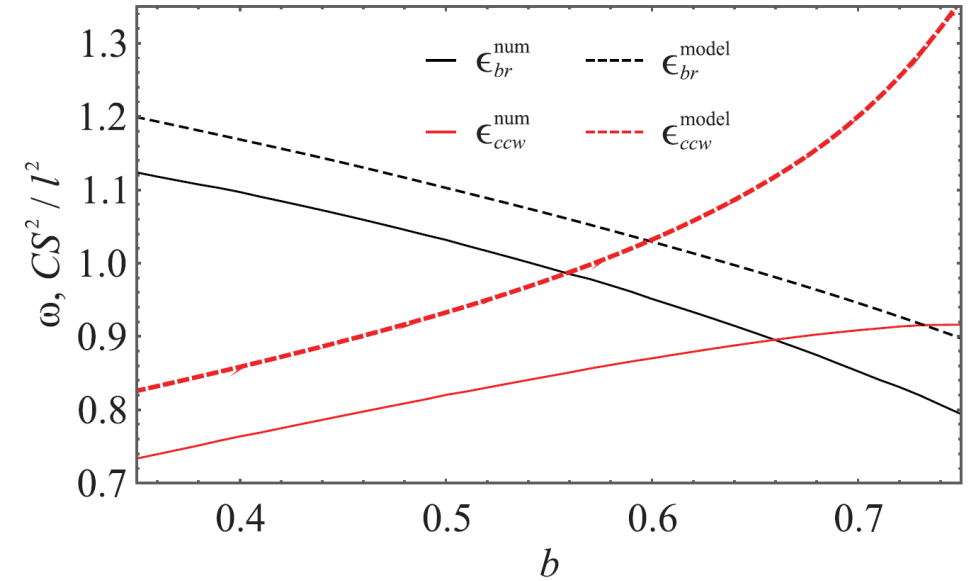
Кривизна Берри

$$\Omega_n(\mathbf{q}) = i \sum_m \frac{\langle n | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_x} | m \rangle \langle m | \frac{\partial \hat{H}_{\mathbf{q}}}{\partial q_y} | n \rangle - (q_x \leftrightarrow q_y)}{(\epsilon_{n\mathbf{q}} - \epsilon_{m\mathbf{q}})^2}$$

$$\Omega(\mathbf{q}) = \pm \frac{v^2(tq^2 - \mu)}{2((\mu + tq^2)^2 + v^2q^2)^{3/2}}$$

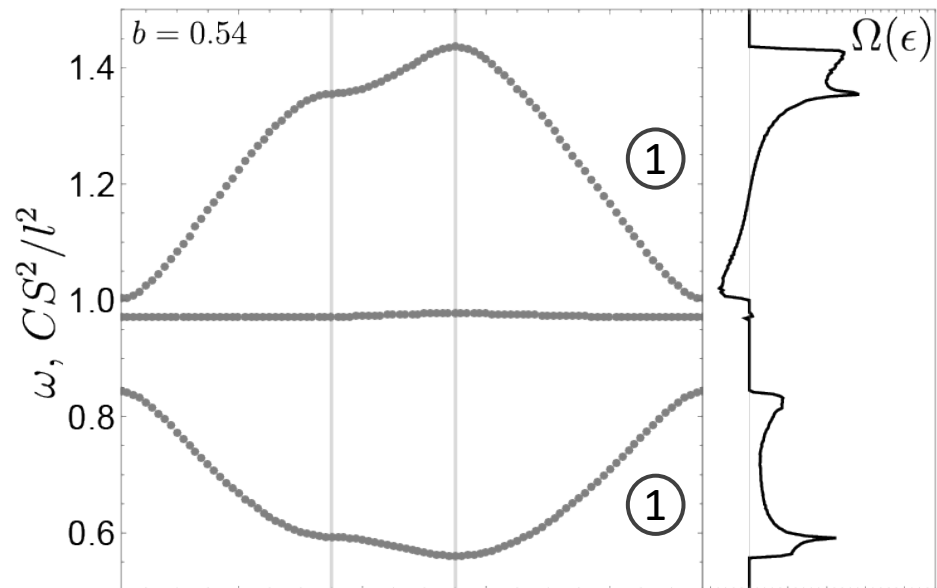
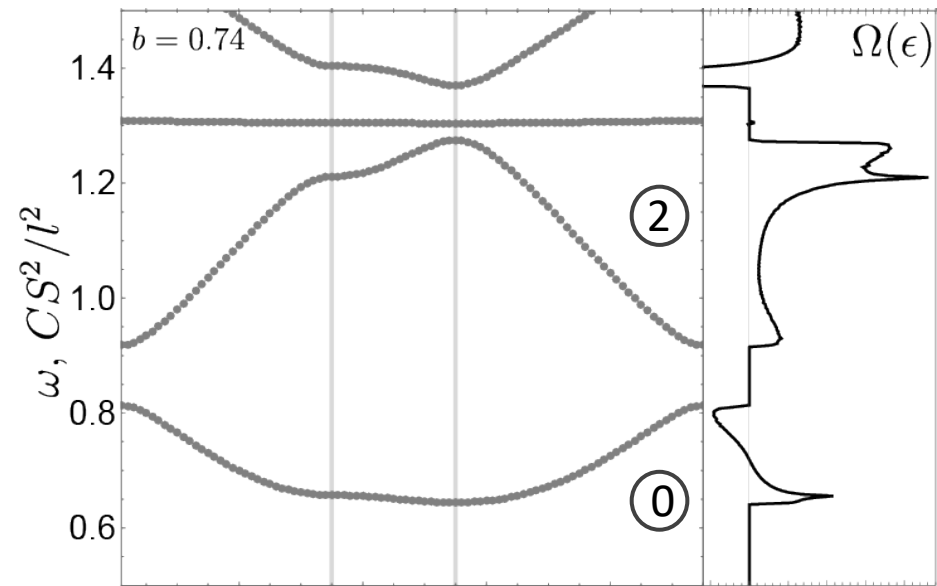
Числа Черна

$$\int d^2\mathbf{q} \Omega(\mathbf{q}) = \pm \pi(\text{sgn } t - \text{sgn } \mu)$$



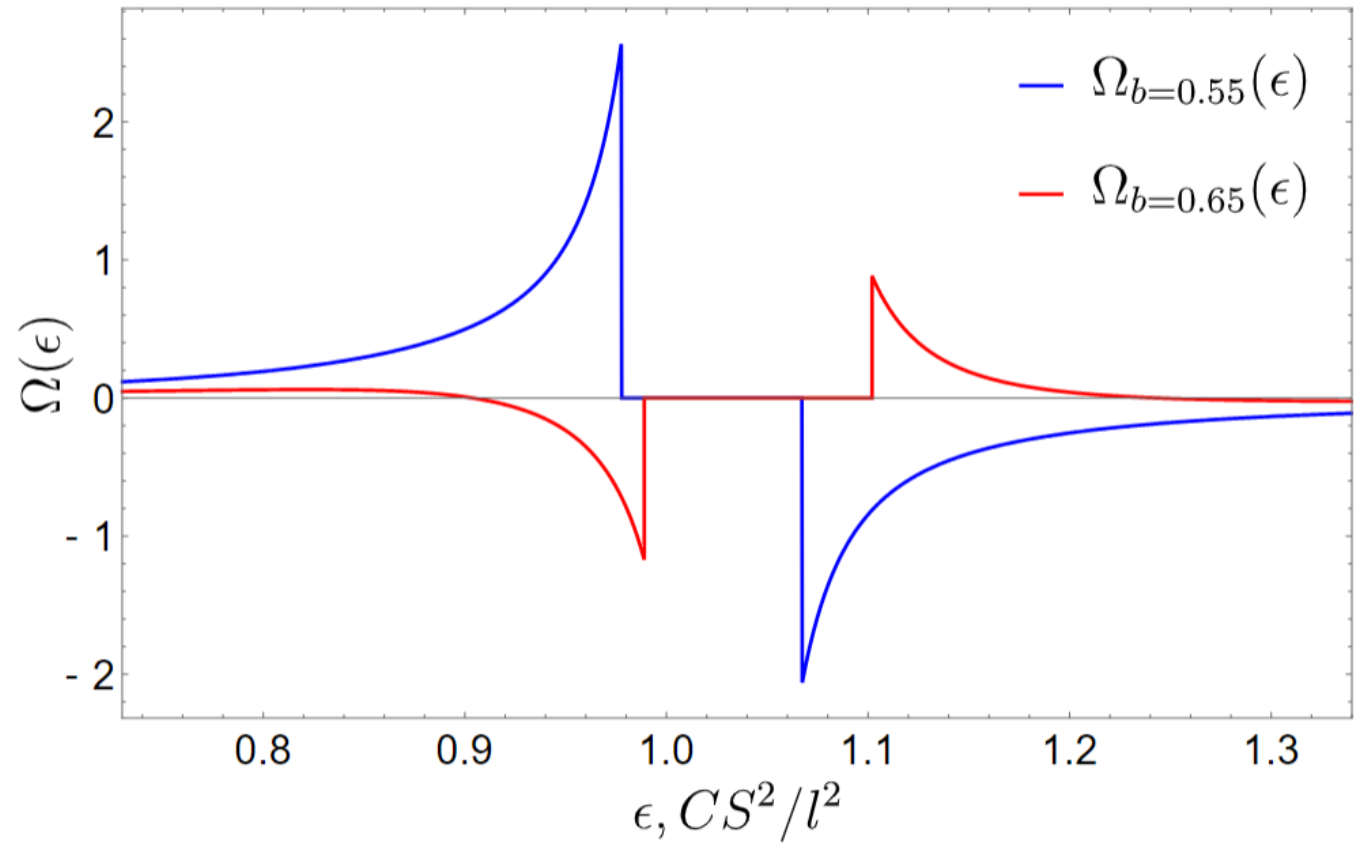
Щель между двумя зонами закрывается
при $b = b_c$

Мода	Числа Черна	
	$b < b_c$	$b > b_c$
Br	-1	0
CCW	1	0

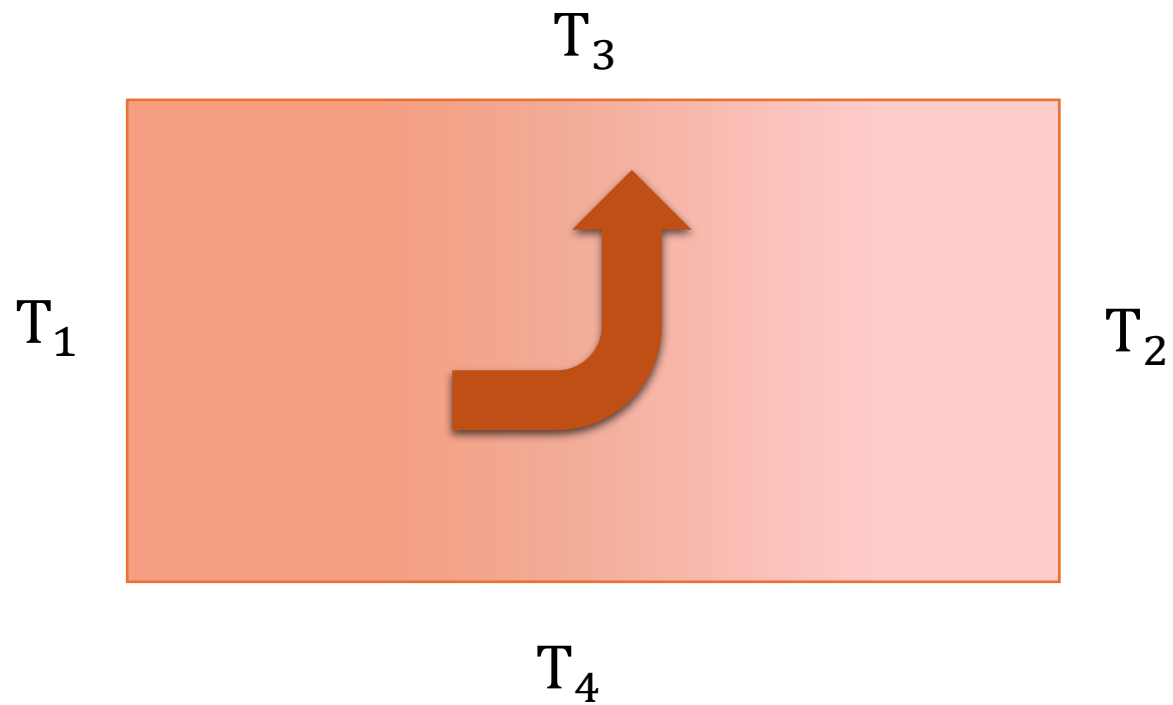


Плотность кривизны Берри

$$\Omega(\epsilon) = V^{-1} \sum_{n\mathbf{q}} \Omega_n(\mathbf{q}) \delta(\epsilon - \epsilon_{n\mathbf{q}})$$

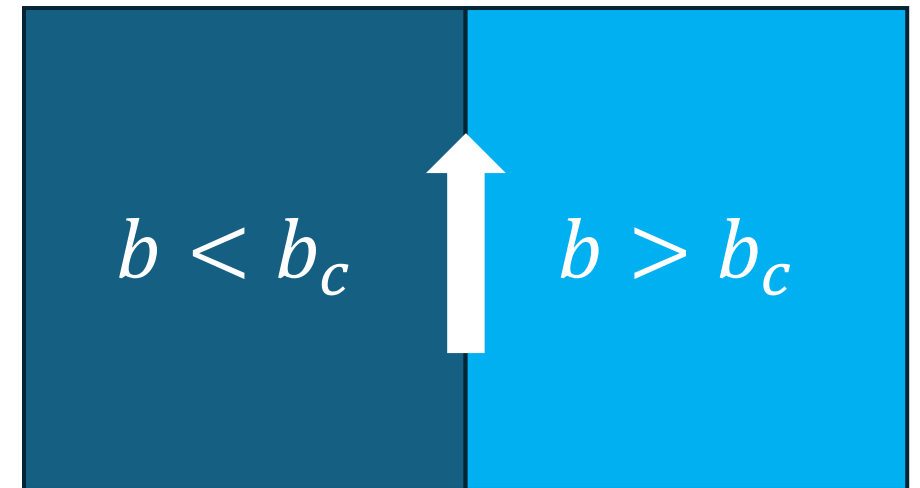


Тепловой эффект Холла



$$\kappa_{xy} \sim \Omega$$

Магнонные краевые состояния



Заключение

- Разработана эффективная теория для описания двух низколежащих зон в спектре магнонов скирмионного кристалла (вблизи $\mathbf{q} = 0$);
- Продемонстрирован топологический переход между зонами Br и CCW: щель между двумя зонами закрывается с повышением магнитного поля и открывается вновь, что сопровождается сменой их топологического характера;
- Наличие топологического перехода может отразиться на свойствах теплового транспорта в системе (тепловой эффект Холла), а также приводить к появлению магнонных краевых состояний.

Спасибо за внимание!