

**Хореографии
поляризованных
нейтронов.**

Предновогодние фантазии

И.А.Митропольский

Фигуры Хладни

$$\begin{aligned} (\Delta)^2 \psi_n = k_n^4 \psi_n &\Leftrightarrow \Delta \psi_n = -k_n^2 \psi_n \\ &\Delta \psi_n = k_n^2 \psi_n \end{aligned}$$

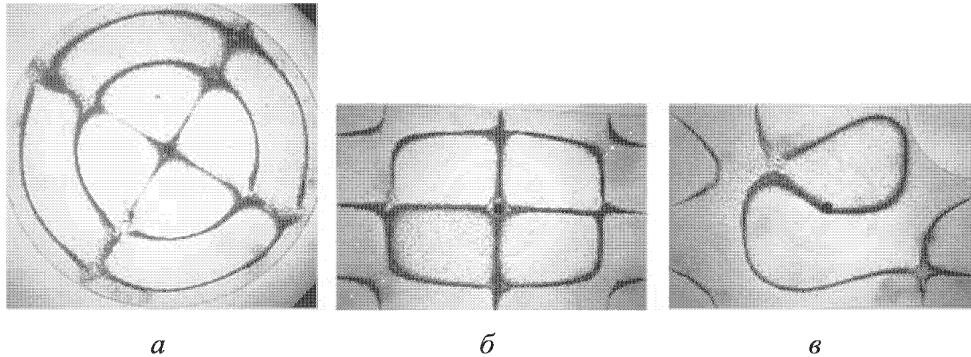


Рис. 2.2. Фигуры Хладни на стеклянных пластинах: *а*) круглой формы ($r = 10,5$ см), *б*) прямоугольной формы ($a = 21$ см, $b = 14$ см) и *в*) в форме четверти бильярда Синая ($a = 21$ см, $b = 14$ см, $r = 5$ см). Все пластины закреплялись в центре, а колебания возбуждались с помощью динамика, который на фотографиях не показан. Пластина *а* соответствует интегрируемому, *б* — псевдоинтегрируемому, *в* — неинтегрируемому бильярдам [81]



Рис. 2.1. Эрнст Флоренс Фридерик Хладни (1756–1827), впервые наблюдавший звуковые фигуры на поверхности колеблющихся пластин. В настоящее время эти фигуры носят его имя [60]

Микроволновые бильярды

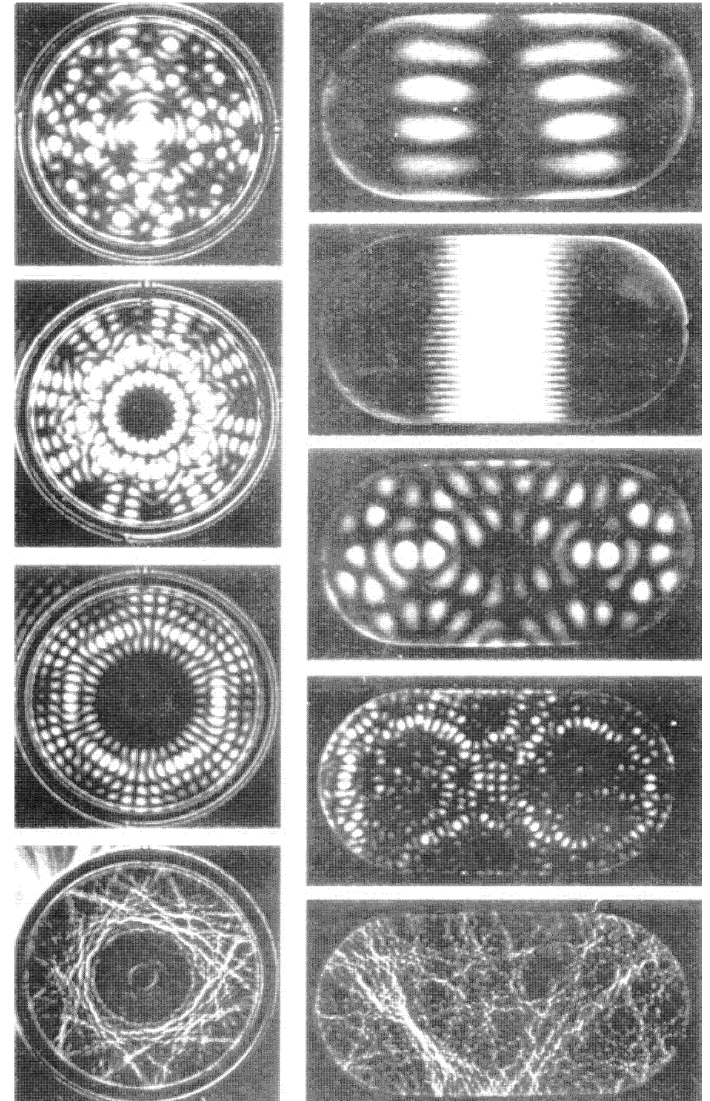
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$$

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = 0$$

$$(\Delta + k^2)\vec{B} = 0$$

$$k = \omega/c$$



Спектральные характеристики

$$S_n = \omega_n - \omega_{n-1}$$

$$P(s) = \exp(-s)$$

Пуассон

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right)$$

Вигнер

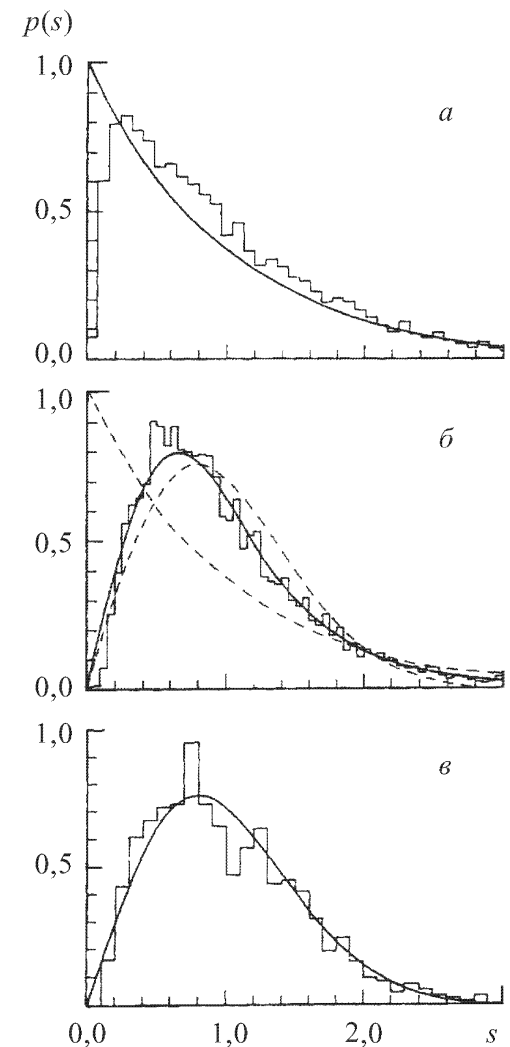
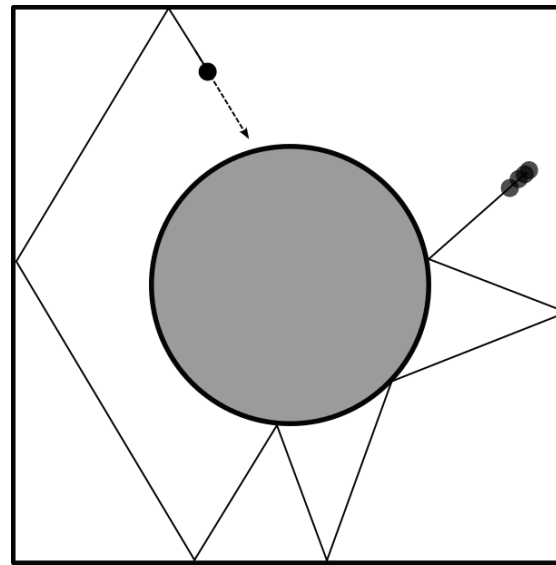
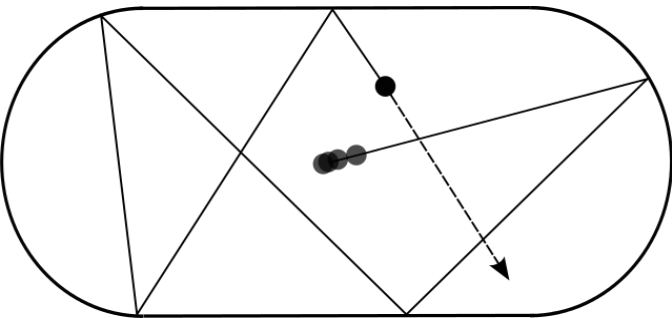


Рис. 2.11. Гистограмма распределения расстояний между ближайшими собственными частотами, полученная для ряда прямоугольных бильярдных со сторонами $a = 16,5-51,0$ см и $b = 20$ см в двух частотных диапазонах — от 5 до 10 ГГц (а) и от 15 до 18 ГГц (б) [39], и соответствующие результаты для бильярда в форме четверти стадиона (в), показанного на рис. 2.10 [80]

Новые решения задачи N тел

$$D = 2: \quad \ddot{z}_j = \sum_{i=1, i \neq j}^N m_i (z_i - z_j) r_{ij}^{-3}, \quad r_{ij} = |z_i - z_j|$$

Интегралы движения: $\sum_{i=1}^N m_i z_i = 0, \quad L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i \wedge z_i, \quad E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{z}_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} m_i m_j r_{ij}^{-1}$

Центральные конфигурации: $\ddot{z}_j = \lambda z_j, \quad \lambda < 0$

Если правильно выбраны скорости, $\dot{z}_j = \gamma |z_j|$
и угол между z'_j и z_j одинаков для всех j ,
то движение тел происходит по **кривым второго порядка** (Кеплер),
при этом все кривые подобны.

В частности, возможно движение тел вокруг центра тяжести по окружностям, как если бы все они образовывали единое твердое тело – положение относительного равновесия.

Возможны ли другие периодические движения?

Хореографии

Изучение геометрических и динамических свойств решений показывает необходимость привлечения численных методов для вычисления траекторий.

Анимация развития решений во времени показывает причудливое движение тел, напоминающее танец.

Движение тел друг за другом по одной траектории – простая хореография. Возможны и сложные хореографии.

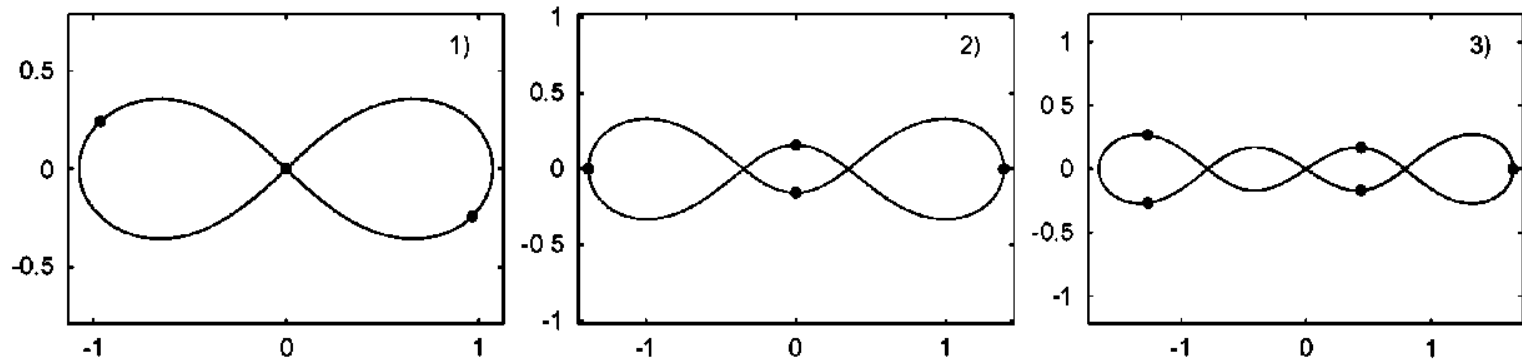
Столкновения?

Роль потенциала?

Решения в виде восьмерки

Первая хореография для $N=3$ в виде равностороннего треугольника была найдена Лагранжем в 1772 г.!

Только в 1999 г. было найдено следующее решение в виде «восьмерки».



Свойства:

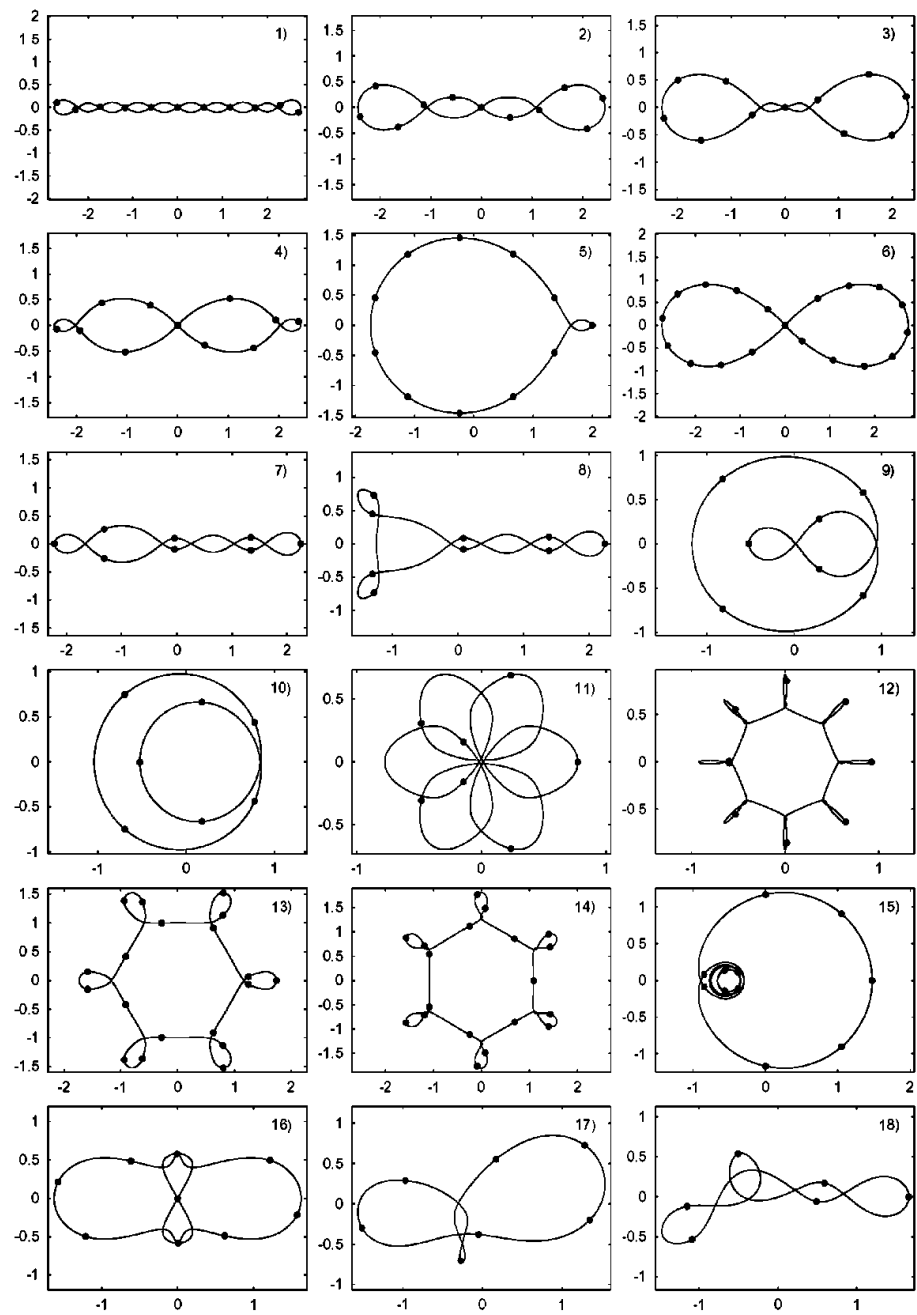
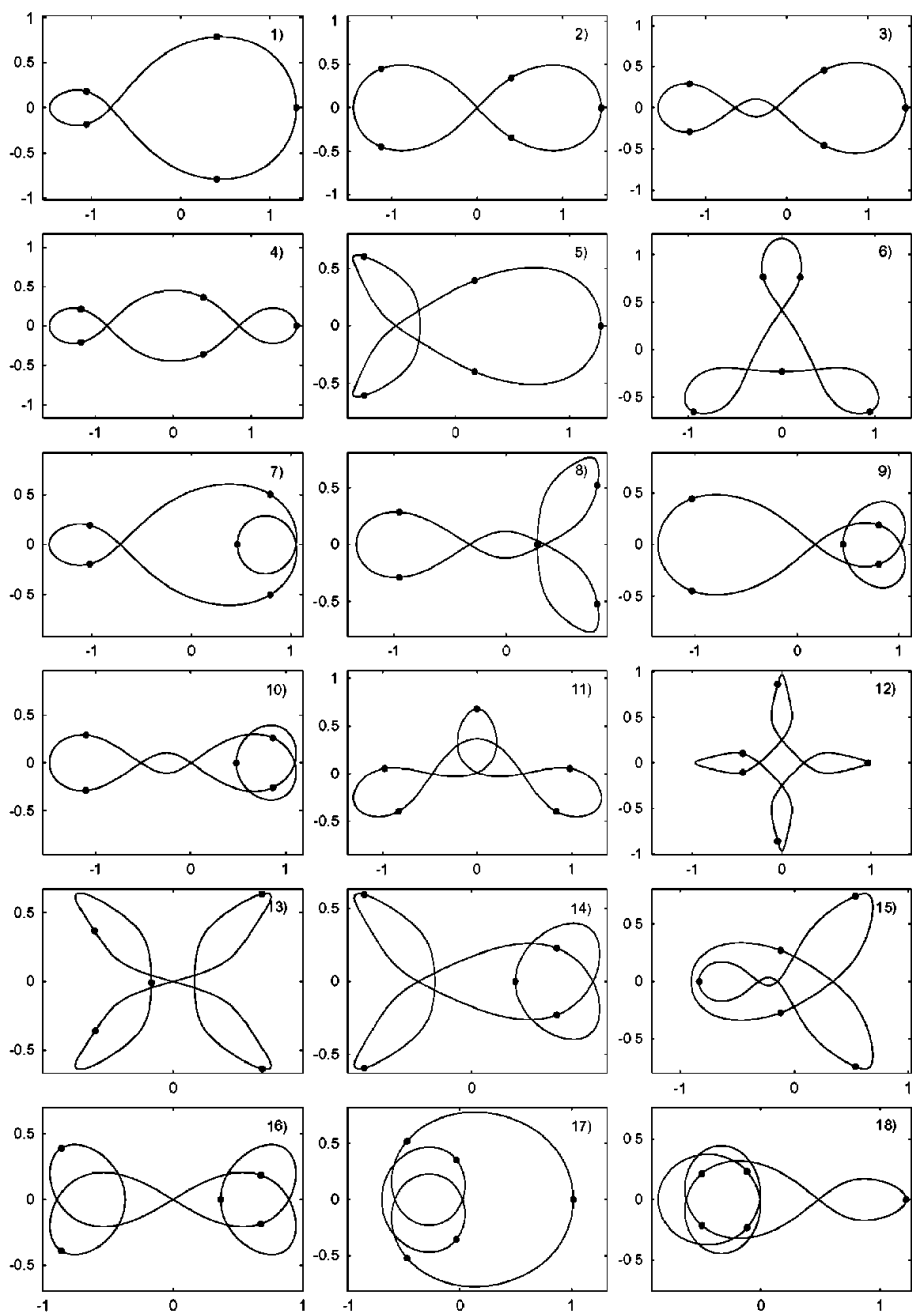
единственность, нулевой угловой момент, линейная устойчивость.

Обобщения:

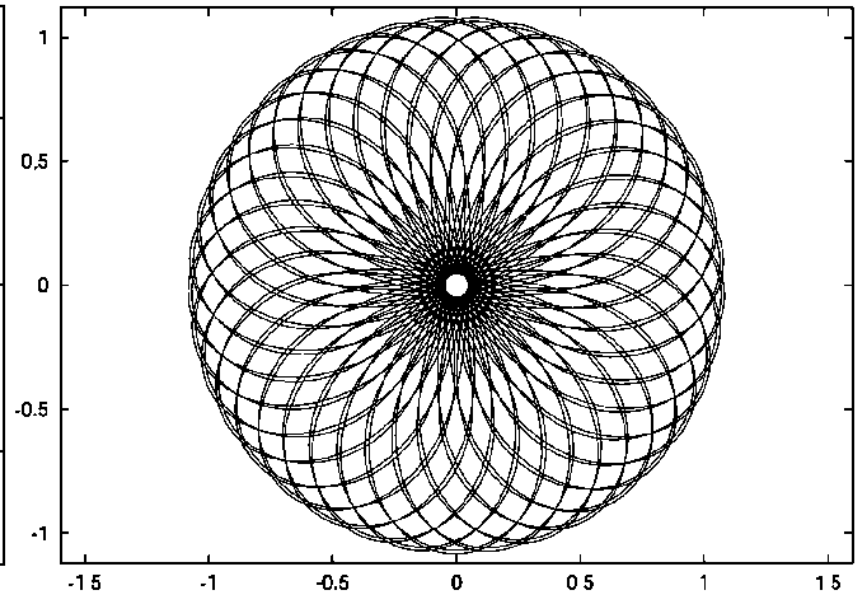
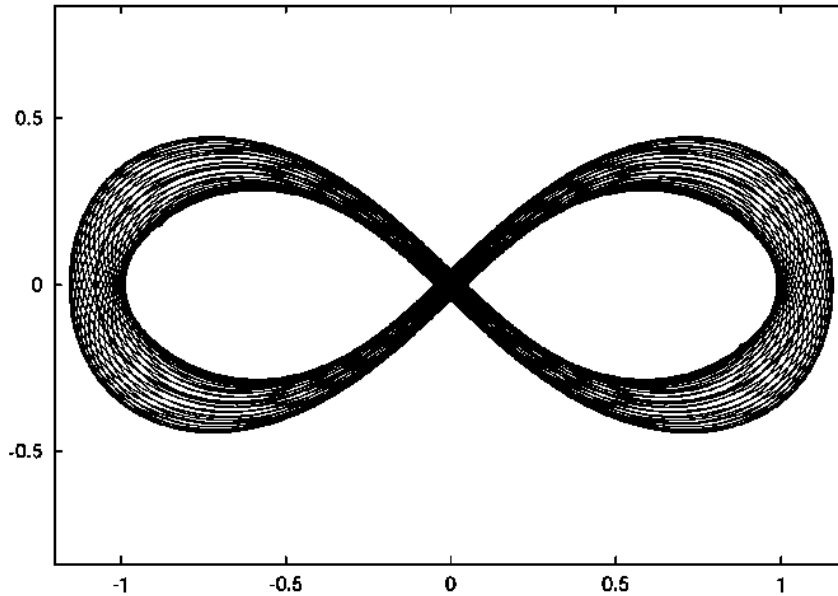
близкие массы – пучок восьмерок,

вариации потенциала:

$$U(z) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} f(r_{ij}), \quad f(r) = r^{-a}, \quad a > 0$$



Сложные хореографии



Слева: хореография для различных масс.

Справа: хореография для ненулевого момента

$$L = \frac{3}{37} 2\pi$$

Выводы

- Даже для большого числа частиц возможны бесстолкновительные режимы движения.
- Совокупность тел, участвующих в хореографии, напоминает скорее твердое тело, чем газ.
- Возможность создавать компактные структуры.

Спасибо за внимание!

С наступающим Новым годом!

Mitropolsky_IA@pnpi.nrcki.ru