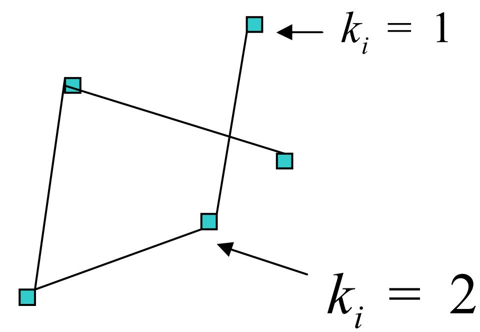
С.Л.Гинзбург, А.В.Накин, Н.Е.Савицкая

САМООРГАНИЗАЦИЯ НА СЛОЖНЫХ СЕТЯХ

СЕТЬ

Любая сеть – совокупность узлов.

k_i - *число связей i-ого узла (degree)*

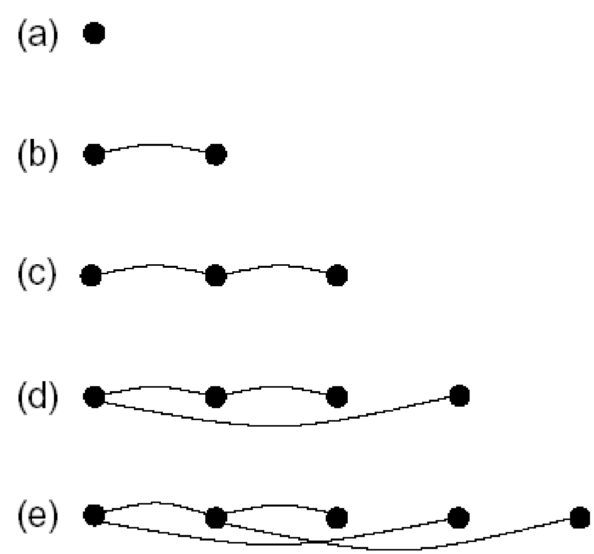


ПРОЦЕСС ПОСТРОЕНИЯ СЕТИ

На каждом шаге рождается узел

с m связями, они присоединяются к уже существующим узлам

КАК ПРИСОЕДИНЯЮТСЯ?



ЛИНЕЙНОЕ ПРЕИМУЩЕСТВЕННОЕ ПРИСОЕДИНЕНИЕ и БЕЗМАСШТАБНАЯ СЕТЬ

Узлы для присоединения нового выбираются с вероятностью, пропорциональной функции f(k). Например, такой (линейной):

$$f(k,t) = k/(2t)$$

В этом случае мы имеем дело с линейным преимущественным присоединением

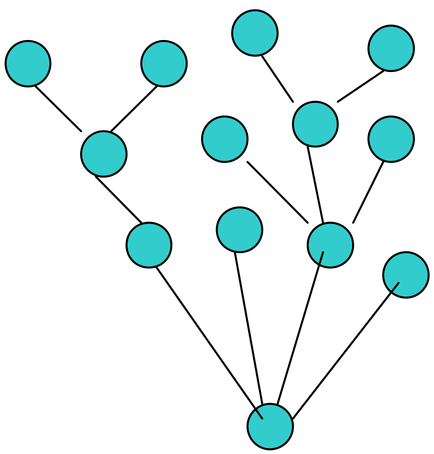
В этом случае вероятность узлу иметь k связей выражается формулой:

$$P(k) = \begin{cases} \dfrac{4}{k(k+1)(k+2)} & \text{-точное решение} \\[2ex] \dfrac{c}{k^3} & \text{- континуальное приближение} \end{cases}$$

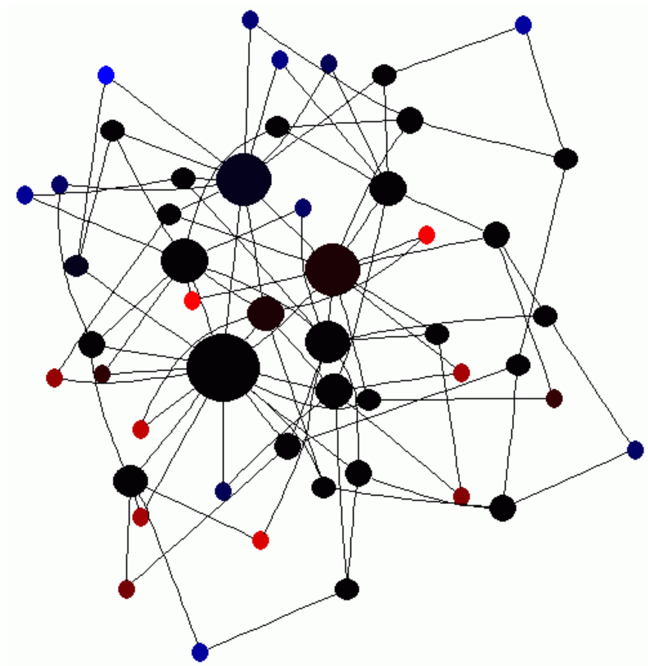
ПОЛУЧАЕМ БЕЗМАСШТАБНУЮ СЕТЬ

СЕТИ С РАЗЛИЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ m

В случае m=1 сеть имеет древовидную структуру и на ней отсутствуют замкнутые циклы. В случае m>1 в сети имеются замкнутые циклы.



m=1



m=2

Закрытая система на сети

$$\tau \frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i}$$

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + 2\pi F_i$$

$$J_{ij} = J_{ji} \qquad \sum_j J_{ij} = k_i$$

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} \varphi_j - k_i \varphi_i + 2\pi F_i$$

z_i

Отображения для $z_i = \frac{V}{2\pi}\sin\varphi_i + \frac{\tau}{2\pi}\frac{d\varphi_i}{dt}$

для внутренних узлов сети

$$z_i(n+1) - z_i(n) = \sum_j J_{ji}\Psi\left(z_j(n)\right) - k_i\Psi\left(z_i(n)\right)$$

для узлов границы

$$z_i(n+1) - z_i(n) = \sum_j J_{ji}\Psi\left(z_j(n)\right) - k_i\Psi\left(z_i(n)\right) + [F_i(n+1) - F_i(n)]$$

$$\Psi\left(z_i(n)\right) = \theta[z - z_c] - \theta[-z - z_c]$$

суммарное значение переменной выражается через сумму внешних воздействий:

$$\sum_i z_i(n+1) - z_i(n) = \sum_i [F_i(n+1) - F_i(n)]$$

ПРОЦЕСС МОДЕЛИРОВАНИЯ

1. Мы возмущали систему в граничных узлах. **Граница – узлы, в которых k=m. После того, как граница была определена, мы делили ее на два подмножества: «положительное» и «отрицательное», а затем добавляли величину $+\Delta h$ в случайно выбранный узел «положительного» подмножества, и величину $-\Delta h$ в случайно выбранный узел «отрицательного».**

2. После возмущения система, согласно алгоритму, релаксирует к метастабильному состоянию, в котором все |z|<zc. После того, как все динамические процессы остановятся, систему возмущают вновь, согласно пункту 1. и т.п.

АЛГОРИТМ МОДЕЛИРОВАНИЯ

0. В первую очередь путем линейного преимущественного присоединения строилась безмасштабная сеть (N=10000), затем каждому узлу такой сети приписывалась переменная (узлы пронумерованы в порядке появления). Динамика переменной описывается следующим алгоритмом:

$$z_n > z_c \Rightarrow z_n \to z_n - k_n$$

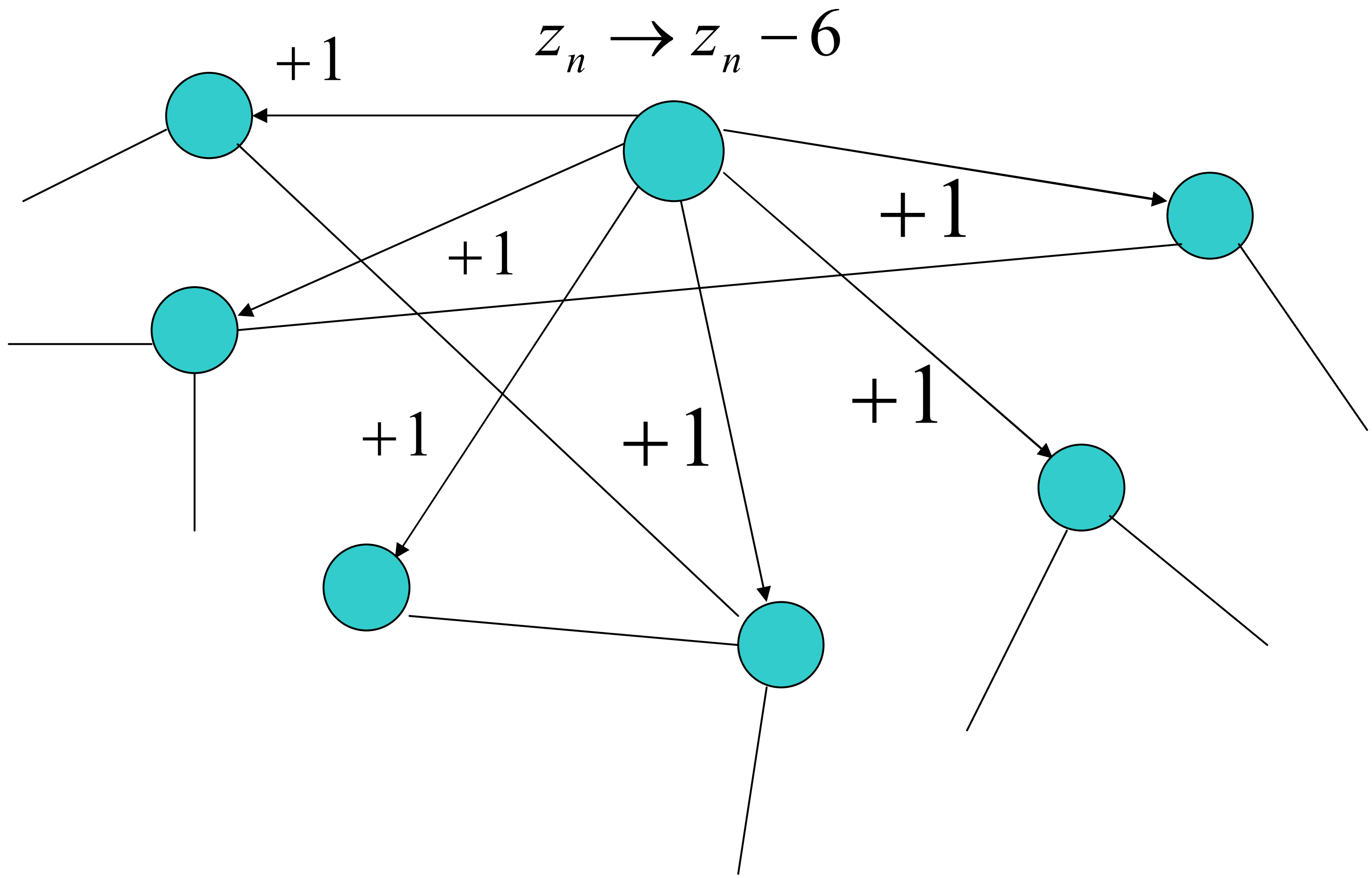
$$\mathrm{z}_\mathrm{i} \to z_i + 1$$

$$z_n < -z_c \Rightarrow z_n \to z_n + k_n$$

$$\mathrm{z}_\mathrm{i} \to z_i - 1$$

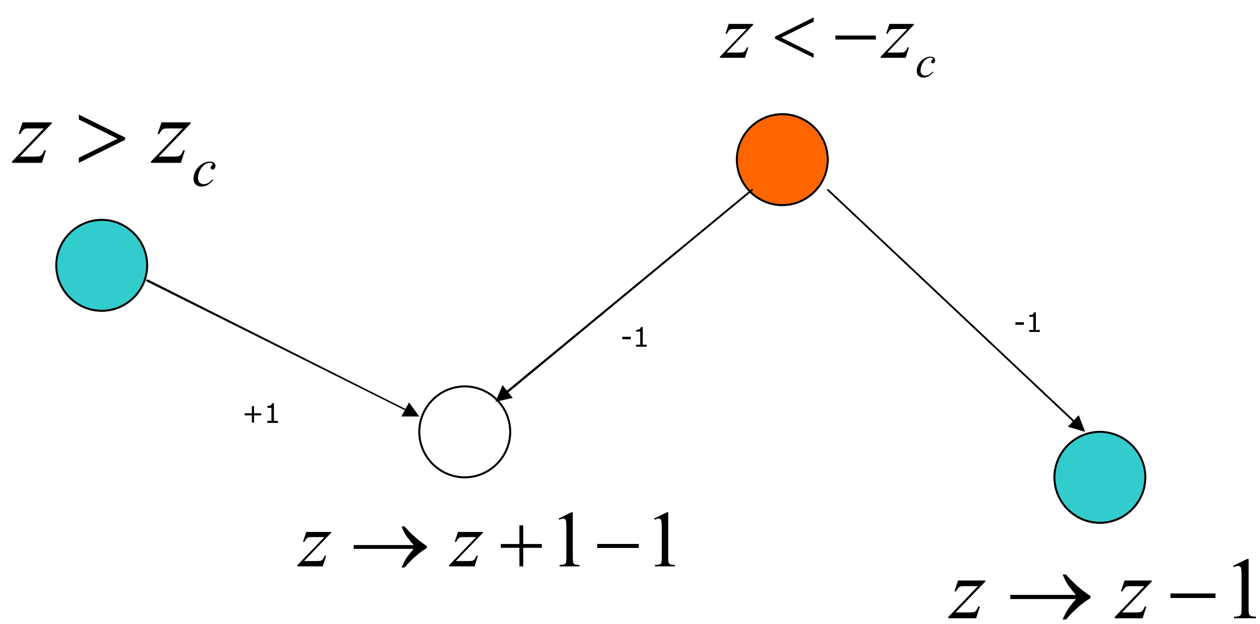
Индекс *i обозначает узлы, связанные с n-ым узлом.*

АЛГОРИТМ. ИЛЛЮСТРАЦИЯ



ПРОЦЕСС ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ

АЛГОРИТМ. ИЛЛЮСТРАЦИЯ



Два типа процесса аннигиляции

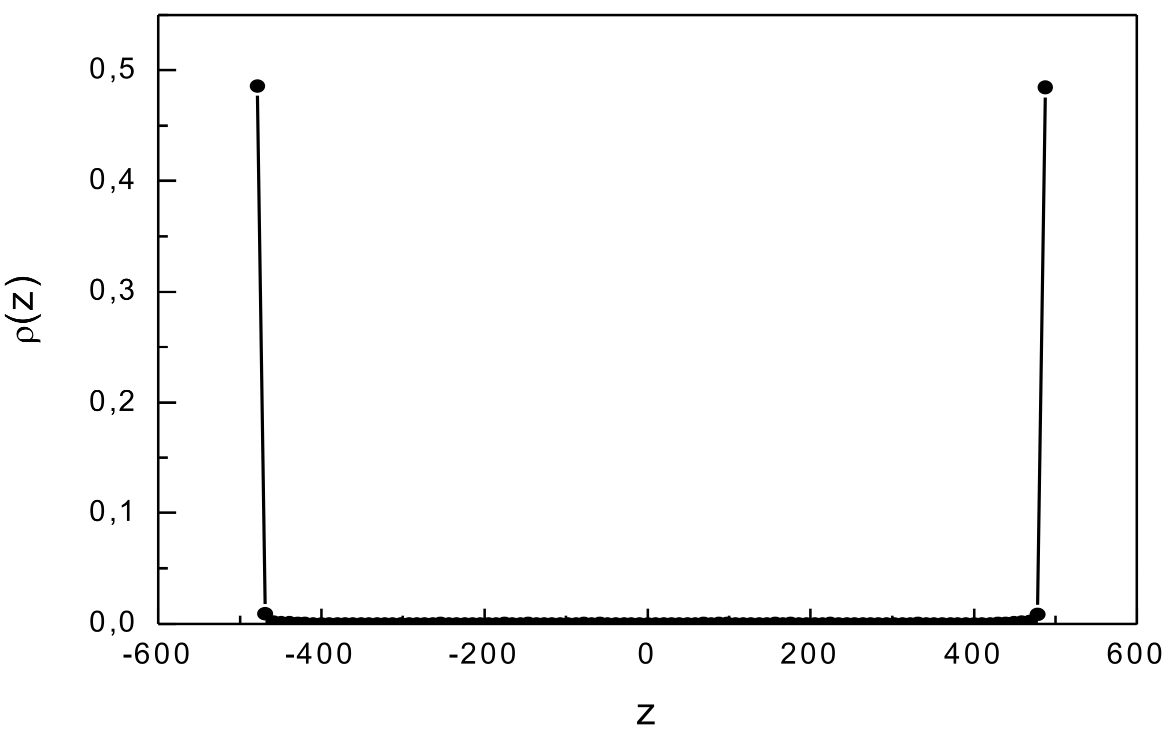
1. Положительная и отрицательная единицы приходят в один и тот же узел, величина z на нем колеблется у нуля.
2. Положительная или отрицательная единица приходит в узел с большим значением |z|, в результате чего это значение уменьшается.

КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ

ПЕРВОЕ: после переходного периода, несмотря на сложную топологию сети, в системе возникает критическое состояние, то есть примерно в половине узлов z становится близко к положительному порогу, а в другой половине – к отрицательному. Удивительно то, что не происходит полной аннигиляции положительных и отрицательных z, а они расходятся по узлам!

В процессе эволюции значения z на узлах флуктуируют. Критсостояние состоит из большого числа метастабильных состояний.

КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ (иллюстрация)



ЛАВИНЫ

Возникающее в системе критическое состояние представляет собой набор метастабильных состояний, по которым система блуждает в процессе своей эволюции. Переход от одного метастабильного состояния в другое осуществляется посредством лавин. Мы рассматривали статистику размеров лавин. Размером лавины называется полное число актов осыпания за время лавины, деленное на размер сети N=10000.

$$s = \frac{1}{N}\sum_{i,m}\theta[z_i(m_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(m_a) - z_c^-]$$

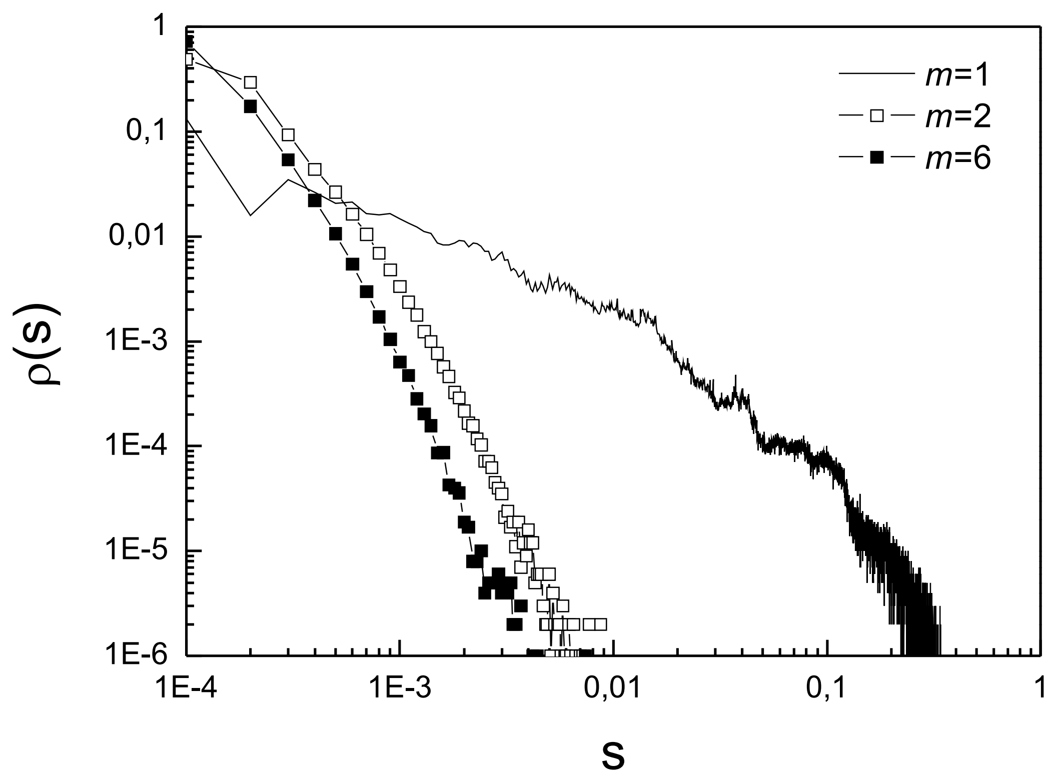
При этом мы брали $\Delta h = 1$

СТАТИСТИКА РАЗМЕРОВ ЛАВИН

Мы рассматривали плотность вероятности размеров лавин для сетей с различной величиной m (m=1,2…6).
ВЫВОД ПЕРВЫЙ: вид функции плотности вероятности зависит от величины m. Это связано с наличием или отсутствием замкнутых циклов в сети.
ВЫВОД ВТОРОЙ: распределения не являются степенными. Лучше всего они фитируются следующей функцией:

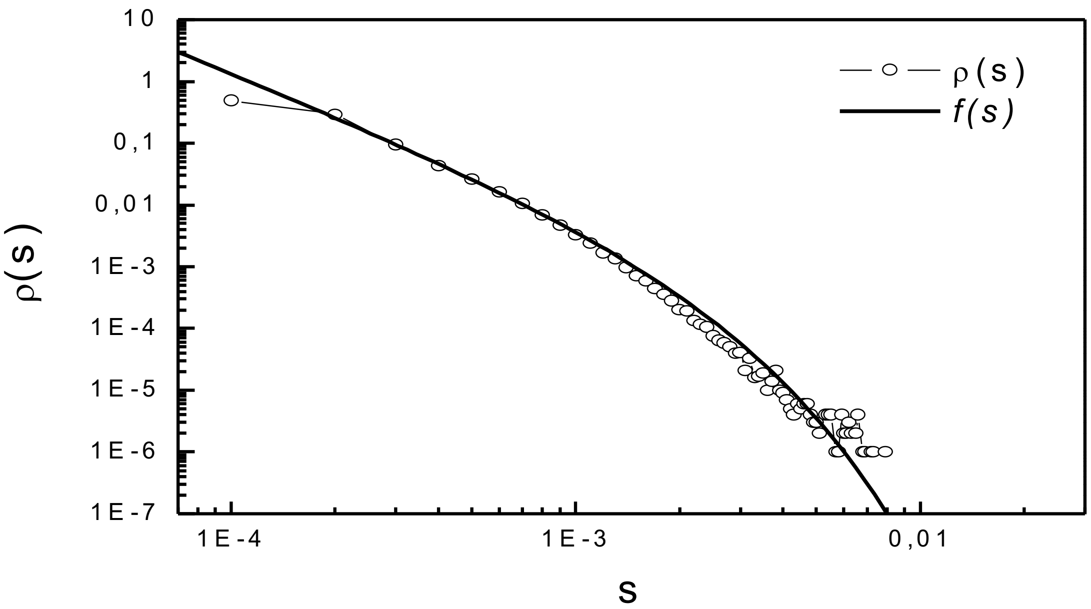
$$\rho(s) \sim s^{-\tau} \exp(-s / s_c)$$

Вид функции распределения размеров лавин зависит от величины m



Объяснение: отсутствие замкнутых циклов на сети в случае m=1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗМЕРОВ ЛАВИН (иллюстрация)



Плотность вероятности размеров лавин для сети с m=2. Данные фитированы функцией

$$f(s) \sim s^{-2.23} \exp(-s/0.001)$$

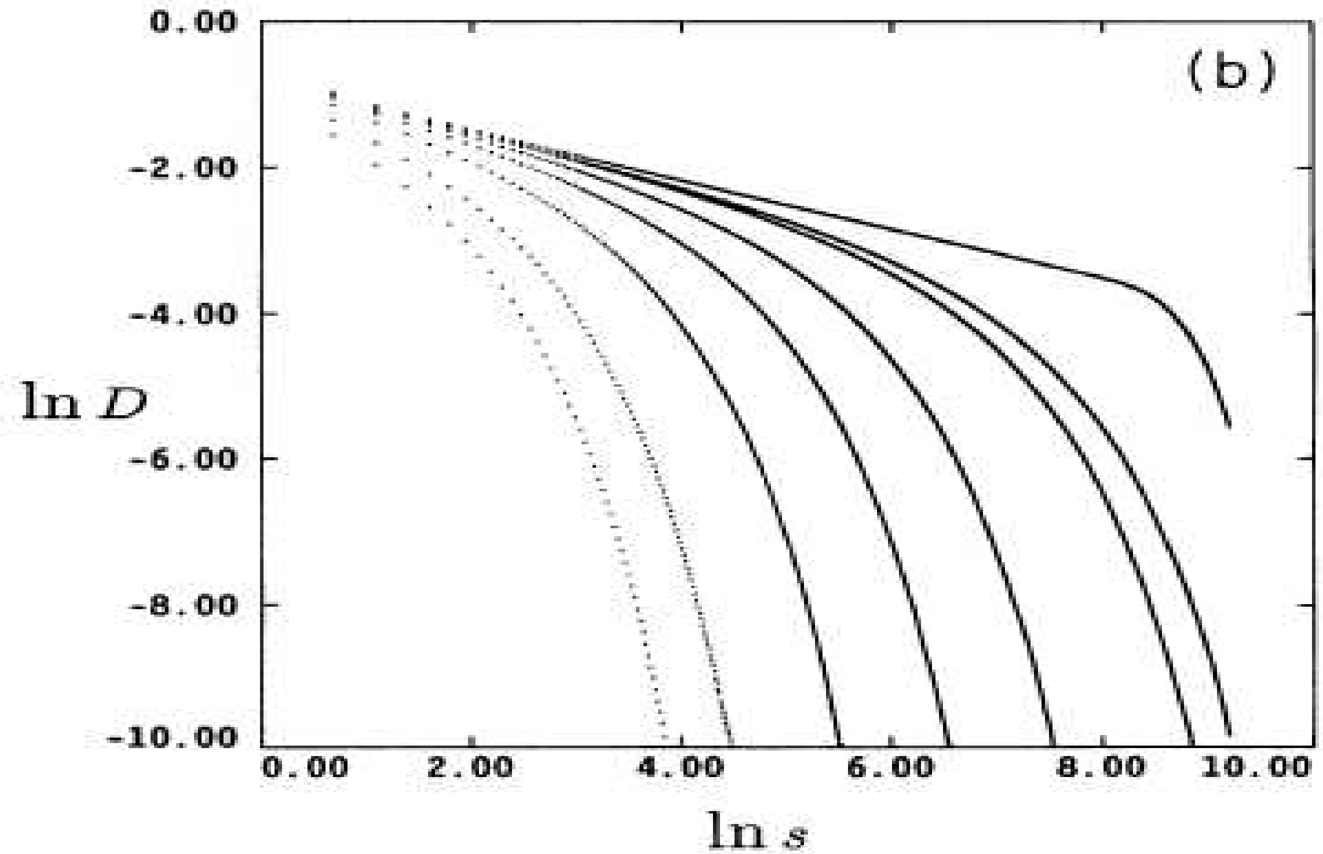
ПОЧЕМУ МЫ НЕ ВИДИМ САМООРГАНИЗАЦИИ?

Виноват **процесс аннигиляции**, вернее, то, что он **происходит практически в каждом узле нашей системы.**

Ранее, на примере моделей самоорганизованных систем типа кучи песка, было установлено, что чем больше в системе точек, в которых может происходить сток, тем сильнее отклоняется функция распределения размеров лавин от степенной зависимости.

PHYSICAL REVIEW A VOLUME 45, NUMBER 12 15 JUNE 1992

B. Tadić,* U. Nowak,† and K.D. Usadel S. Padlewski R. Ramaswamy



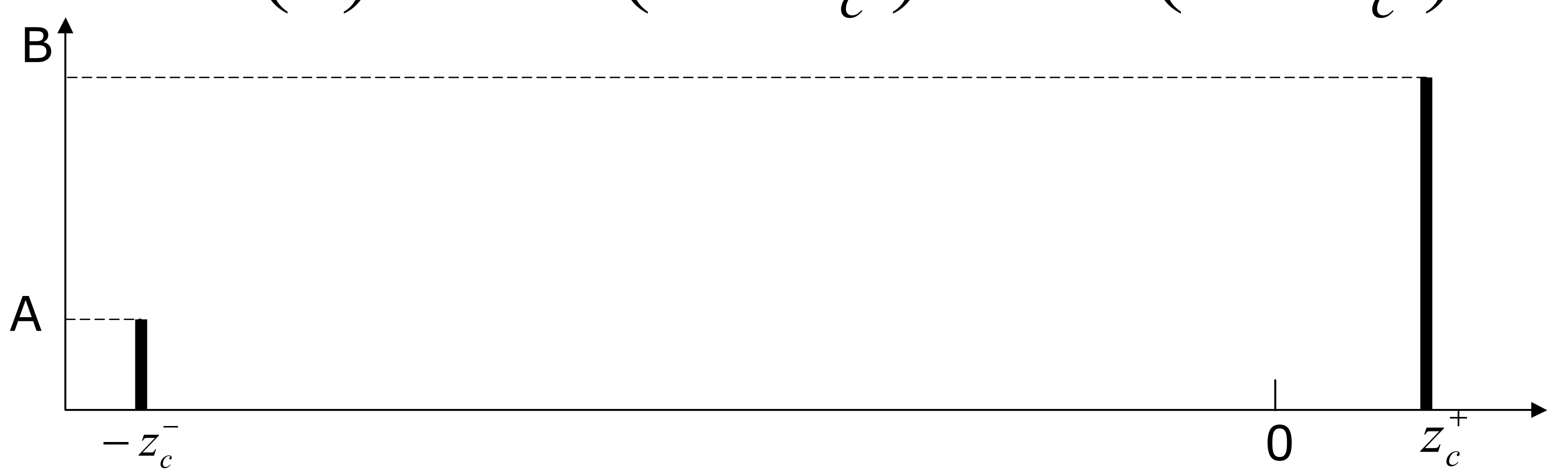
УПРАВЛЕНИЕ ЧИСЛОМ УЗЛОВ АННИГИЛЯЦИИ

СПОСОБ: предположим, что величина одного из порогов в разы отличается от величины другого.

$$z_c^+ \neq z_c^-; z_c^+ / z_c^- = x$$

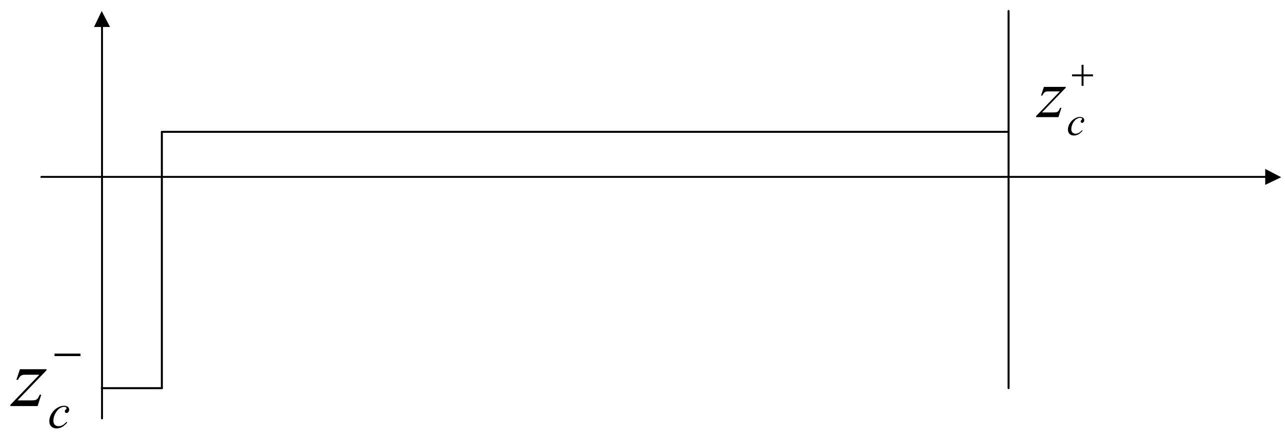
Тогда в критическом состоянии имеем следующую функцию распределения по z:

$$P(z) = A\delta(z + z_c^-) + B\delta(z - z_c^+)$$



КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК АННИГИЛЯЦИИ

Аннигиляция происходит на точках с z близким к отрицательному порогу. Пример: одномерный случай



Каково соотношение положительных и отрицательных узлов?

$$< z >= 0; A + B = 1$$

$$A = \frac{z_c^+}{z_c^+ + z_c^-}; B = \frac{z_c^-}{z_c^+ + z_c^-}$$

Разделение границы

Мы использовали в расчетах **два способа** разделения границы на «положительную» и «отрицательную» части

1. $$n_b^- / n_b^+ = z_c^+ / z_c^-$$

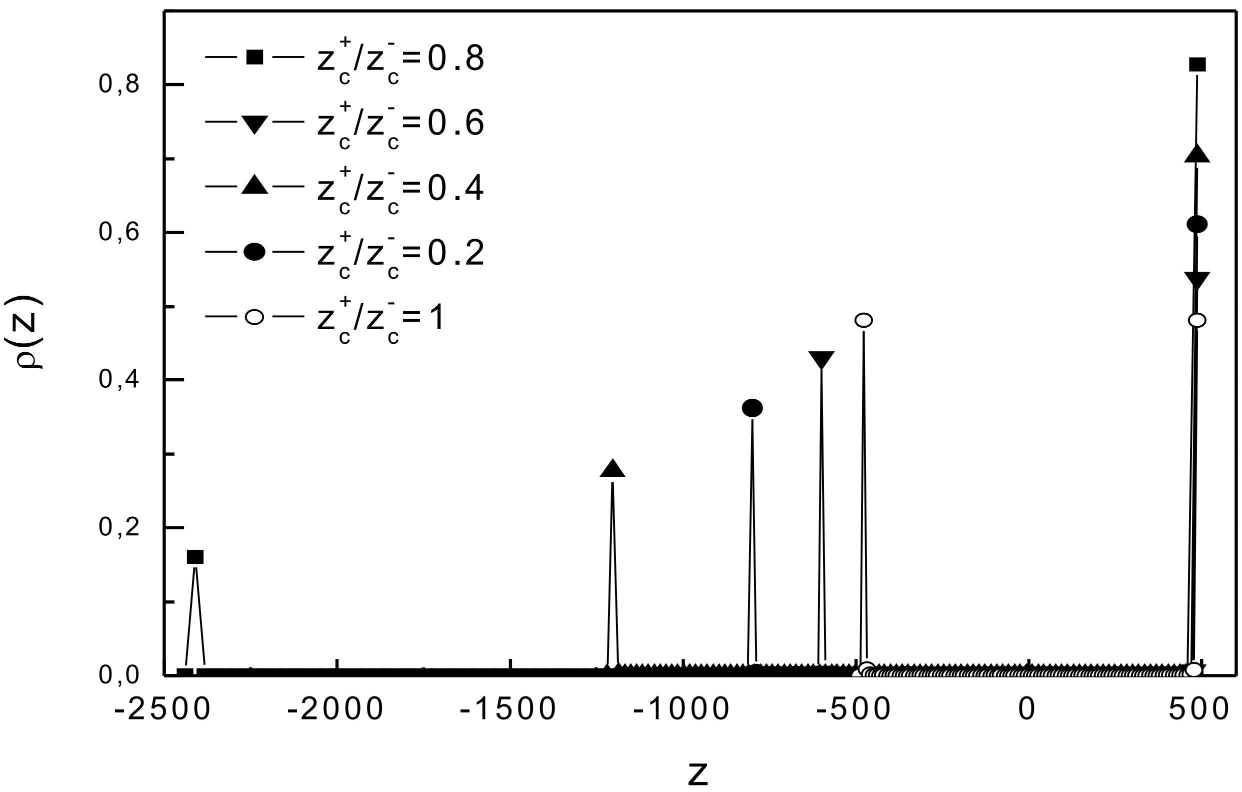
2. $$n_b^+ / n_b^- = 1$$

Критическое состояние

Чудо второе: в обоих случаях **<u>критическое состояние существует</u>**. Оно представляет собой набор метастабильных состояний, переходящих друг в друга посредством лавин. Распределение величин z в каждом из метастабильных состояний представляет собой два пика на величинах близких к положительному и отрицательному критическим значениям для z.

Чудо третье: <u>соотношение высот этих пиков обратно соотношению</u> z_c^{+} / z_c^{-}

Критическое состояние



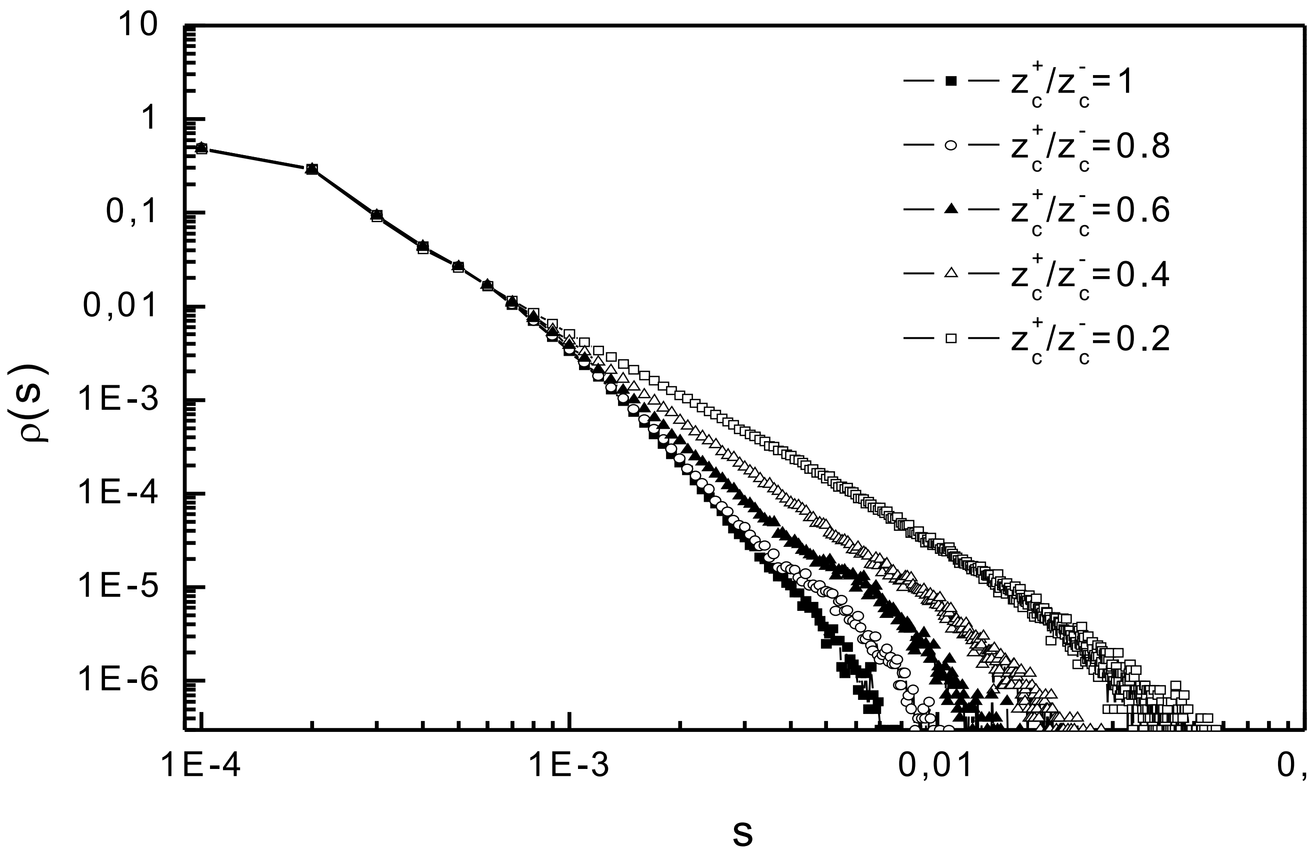
Самоорганизация в системе

Мы рассмотрели распределение размеров лавин в системе. В результате было получено, что при уменьшении соотношения

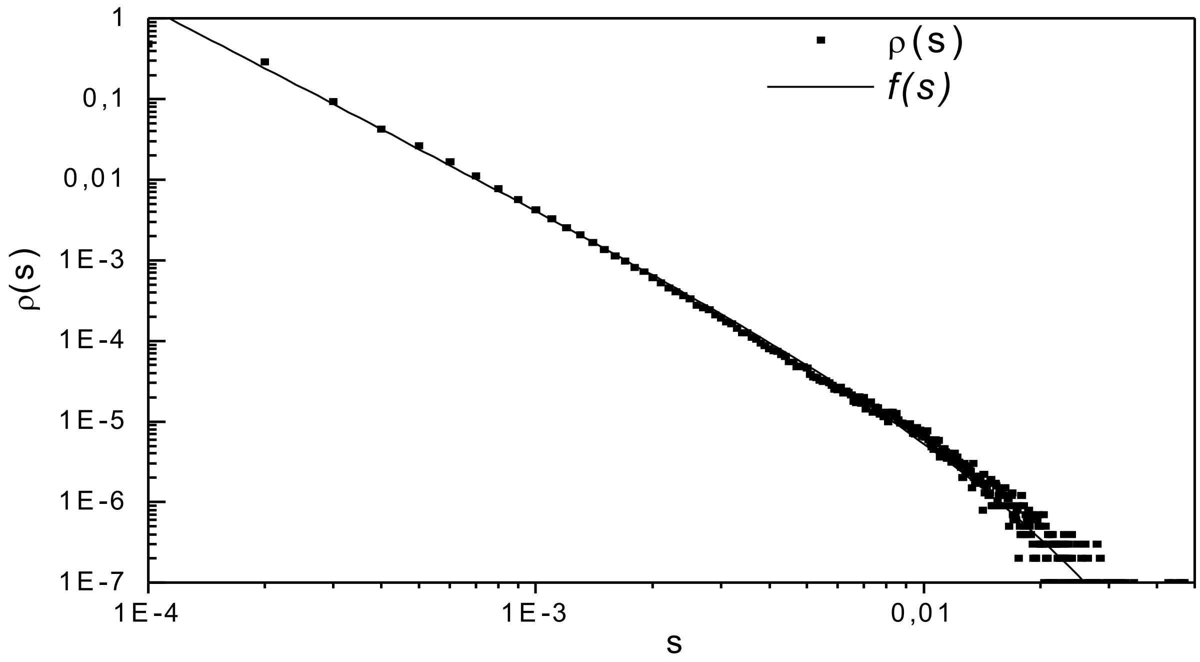
$$z_c^+ / z_c^-$$

оно меняется от экспоненциально-степенного к степенному.

Распределение размеров лавин

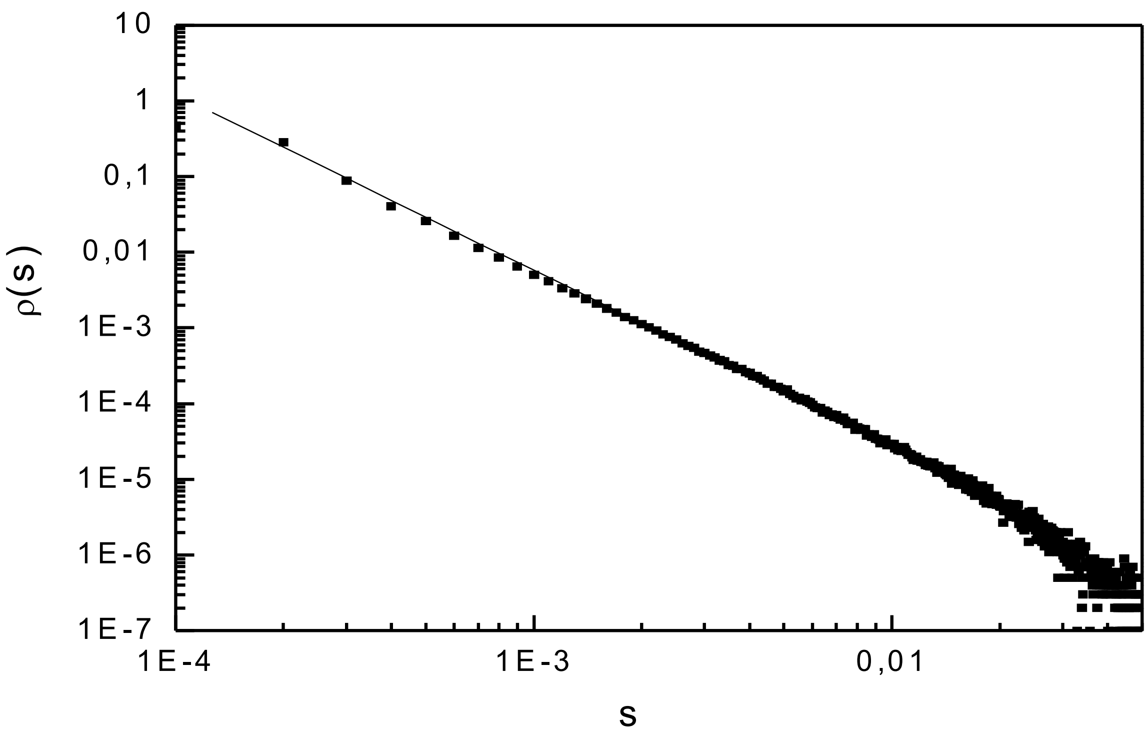


Распределение размеров лавин при соотношении zc+/zc- =0.4



Плотность вероятности размеров лавин для случая z_c^+ / z_c^- =0.4, фитирующая функция $f(s) \sim s^{-2.49} \exp(-s/0.01)$

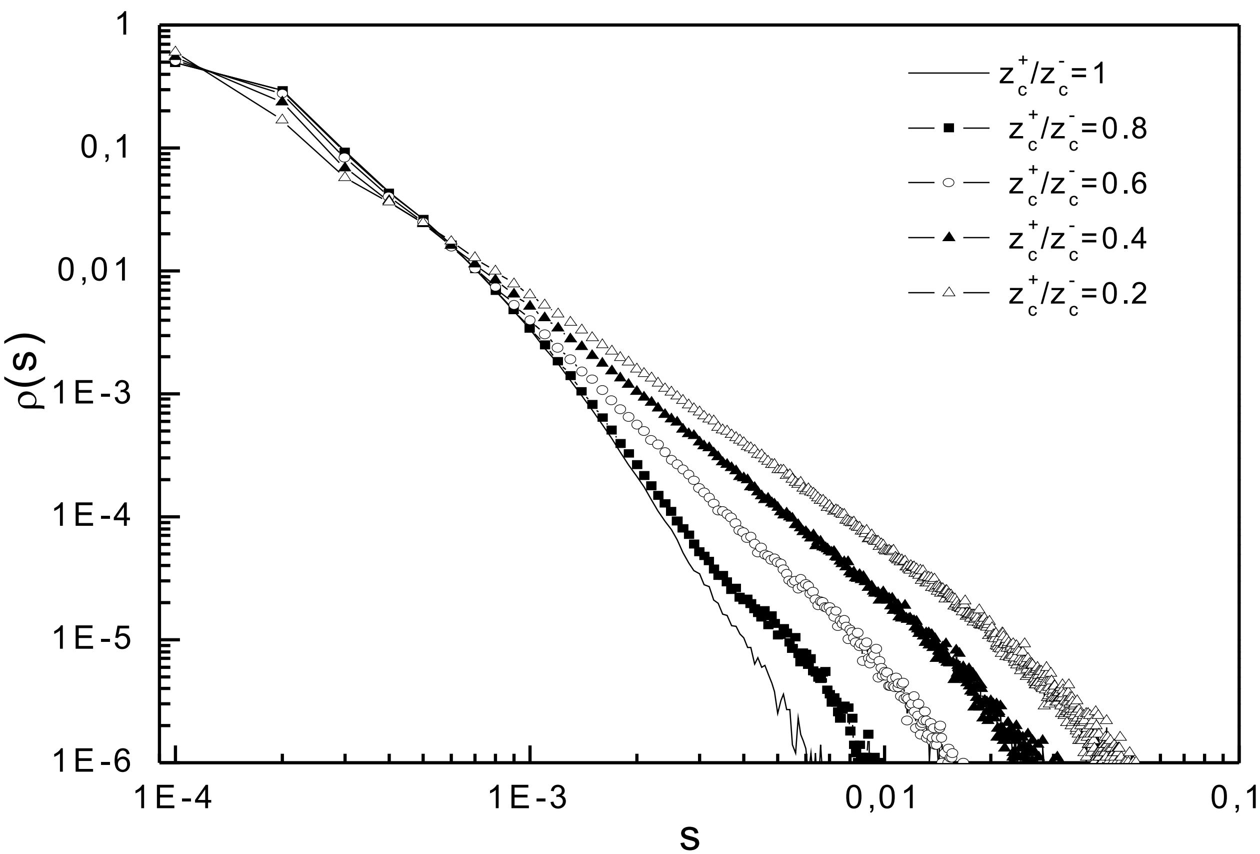
Распределение лавин при соотношении zc+/zc-=0.2



Плотность вероятности размеров лавин для случая

z_c^+ / z_c^- =0.2, фитирующая функция $f(s) \sim s^{-2.39}$

Функции распределения размеров лавин при разных соотношениях zc+/zc- и разделении границы пополам



ДИСКУССИЯ

Основным результатом работы можно считать наблюдение самоорганизации критического состояния в закрытой системе, помещенной на сложную сеть.

Удивительно то, что несмотря на сложную топологию «матрицы», система демонстрирует динамику, аналогичную той, которая наблюдалась на упорядоченных и неупорядоченных решетках.

Результат **актуален** в том плане, что сейчас все научное сообщество активно переключается с изучения топологических свойств сетей на изучение динамики на сложных сетях. Однако системы, подобной нашей по свойствам, еще не изучалось.