

# СКЕЛИНГ И КРИТИЧЕСКИЕ ИНДЕКСЫ В ФИЗИКЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ

Малеев С.В.

- Теория Ландау. Область применимости
- Скеллинг
- Критические индексы
- Кроссовер
- Заключение

# ТЕШРИЯ ЛАНДАУ

Фазовый переход второго рода это появление нового элемента симметрии (параметра порядка  $\Phi$ ) при приближении температуры к точке перехода  $T_C$  происходящий непрерывным образом без скачка.

Вблизи от перехода свободную энергию можно разложить по степеням  $\Phi$

$$F(T) = F_0(T) + A\tau\Phi^2 + B\Phi^4 - h\Phi$$

где  $A, B > 0$ ,  $\tau = (T - T_C)/T_C$  расстояние до точки перехода и  $h$  внешнее поле, сопряженное параметру порядка. Для ферромагнетиков это магнитное поле.

## Минимум



$$\tau > 0; \Phi = 0.$$

$$\tau < 0; \Phi = \sqrt{(A(-\tau) / 2B)} \quad \text{Новая фаза.}$$

Энергия как  
функция  $\Phi$

## СКАЧЕК ТЕПЛОЕМКОСТИ

Общие формулы  $C = T \partial S / \partial T; S = -\partial F / \partial T$

$C$  - теплоемкость,  $S$  энтропия.

Выше перехода  $\Phi = 0, C = C_0$ .

Сразу после перехода

$$C = C_0 + \underline{A^2 / 2BT_C^2}.$$

Восприимчивость- реакция на внешнее поле

$$\Phi = \chi h; \chi = 1 / A\tau$$

Неоднородные пространственные флуктуации

К свободной энергии надо дописать неоднородность.

$$F = F_0(T) + \int d\mathbf{r} \left[ A\tau \Phi^2(\mathbf{r}) + b \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}} \right)^2 \right]$$

В представлении Фурье

$$F = \sum_{\mathbf{q}} |\Phi_{\mathbf{q}}|^2 (A\tau + b\mathbf{q}^2)$$

Рассматривая это выражение как энергию можно вычислить среднее

$$\langle |\Phi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = \frac{1}{A\tau + b\mathbf{q}^2}$$

При  $\mathbf{q} = 0$  это просто восприимчивость.

$\langle |\Phi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle$ : определяет интенсивность рассеяния

Полученное выражение называют формулой  
Орнштейна-Цернике

В реальном пространстве

$$\langle |\Phi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle \rightarrow G(R) = \frac{e^{-\kappa_L R}}{4\pi A R}; \quad \kappa_L = 1/\xi_L = \sqrt{A\tau/b}$$

$R = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$  где  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  две точки среды, между которыми рассматривается корреляция.

Величина  $\zeta = 1/\kappa$  называется корреляционной длиной.

В точке перехода она бесконечна.

При  $R > \zeta$  функция  $G(r)$  очень быстро убывает!

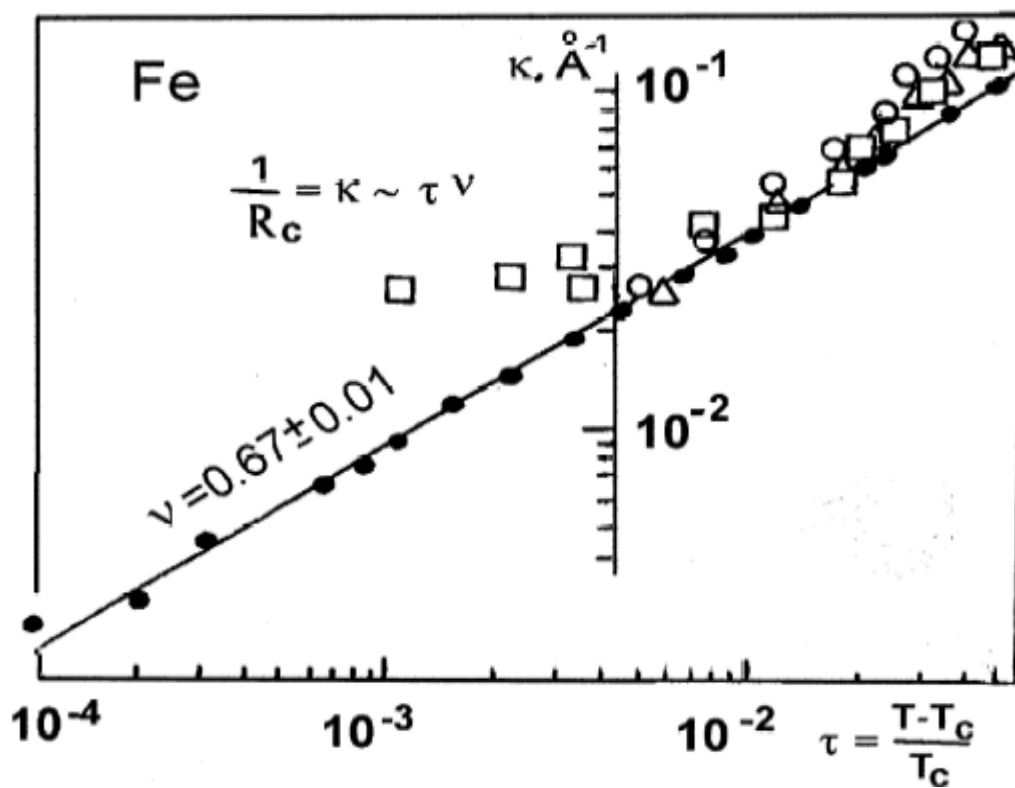
Два свойства

1. Все величины-СТЕПЕНИ  $\tau$

$\Phi \sim (-\tau)^{1/2} ; \chi \sim 1 / \tau ; \zeta \sim 1 / \tau^{1/2} ; C \sim \tau^0$  (скачек)

2. эти степени не зависят от типа системы

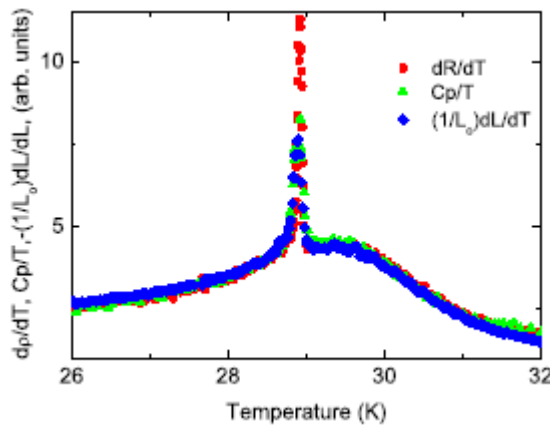
Оба эти свойства противоречат опыту!



$$\nu = 1/2 \rightarrow 0.67.$$


---

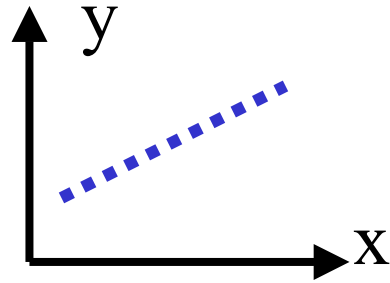
Корреляционная  
длина в железе  
(А.И.Окороков и др.)



Теплоемкость в *MnSi*  
(С.М.Стишов и др.)

Пик вместо скачка!

Общее правило: Температурную зависимость изучаемой величины  $Z$  определяют в двойном логарифмическом масштабе



$$\underline{x = \ln \tau; y = \ln Z}$$

Наиболее ярко зависимость от типа системы видна в случае теплоемкости  $C \sim \tau^{-\alpha}$ .

Обычно  $\alpha \sim \pm 0.1$  Ферромагнетики:  $\alpha = -0.12$ .

Антиферромагнетик с треугольной решеткой

$$\underline{CsMnBr_3; \alpha \approx 0.34.}$$

В ЧЕМ ДЕЛО?



Виноват  $\Phi^4$  член в выражении для энергии

Это нелинейность ответственная за взаимодействие  
флуктуаций

Параметр Леванюка-Гинзбурга

$$K \sim (V/T_c)^2$$

$\tau > K$  -теория Ландау,  $\tau < K$  Скелинг.

Физически это означает, что при малых  $\tau$  внутри  
корреляционного радиуса очень много  
взаимодействующих частиц.

Близко к переходу теория Ландау не работает!

Для разных систем вид взаимодействия различен

Простейшая иллюстрация на языке спинов

Однокомпонентная система (модель Изинга)

Два состояния на узле решетки + или-:



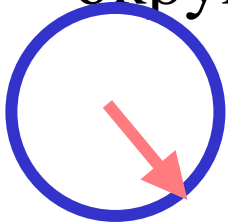
Спин вниз—спин вверх

Реализация: магнетик с сильной анизотропией легкая ось.

Взаимодействие

$$\Phi^4$$

Двухкомпонентная X Y модель: спины вращаются по окружности. Анизотропия-легкая плоскость



Взаимодействие

$$\Phi_x^4 + \Phi_y^4$$

Трехкомпонентная модель Гайзенберга: Вращение по сфере. Изотропный магнетик Взаимодействие

$$\Phi_x^4 + \Phi_y^4 + \Phi_z^4$$

# СКЕЛИНГ(SCALING)

Поровский Паташинский; Halperin and Hoehmberg

Микроскопическое обоснование Вильсон

Основная идея: ПОДПРАВИТЬ ТЕОРИЮ ЛАНДАУ

$$G(R) = \frac{e^{-\kappa_L R}}{4\pi AR} \rightarrow \frac{Z e^{-\kappa R}}{4\pi AR^{1+\eta}}; \quad Z \sim a^\eta.$$

$$\kappa = \tau^\nu / a; \quad \nu \neq 1/2!$$

Два критических индекса:

Индекс Фишера  $\eta$ . Индекс корреляционной длины  $\nu$ .

Все остальные индексы выражаются через  $\nu, \eta$ .

Очень часто  $\eta \leq 0.1, \nu \approx 2/3$ .

## Импульсное представление

$$G(R) \rightarrow \langle |\Phi_{\mathbf{q}}|^2 \rangle = G(q) = \frac{(\kappa a)^\eta}{A \kappa^2} F\left(\frac{q}{\kappa}\right)$$

Предельные случаи

$$G(q) \sim \begin{cases} (\kappa a)^\eta / A \kappa^2; & q \ll \kappa, \\ (q a)^\eta / A q; & q \gg \kappa, \end{cases}$$

В пределе  $q \gg \kappa$  зависимость от  $\kappa$  исчезает. Мы как бы находимся в точке перехода.

Восприимчивость  $\chi = G(0) \sim 1 / \tau^\gamma$ ;

Индекс восприимчивости  $\gamma = \nu(2 - \eta)$ .

Индекс  $\eta$  мал. Поэтому на практике пользуются формулой Орнштейна Цукерника со скелинговой  $K$ .

$$G(r) = \frac{\Lambda}{q^2 + \kappa^2}$$

Это выражение описывает распределение интенсивности рассеяния вблизи Брэгговских пиков выше перехода и используется для определения индекса  $V$ .

Скелинговая (аномальная) размерность  
 Покровский, Паташинский; Каданофф

ГИПОТЕЗА: Обоснование-численные расчеты,  
 ренорм-группа, адекватное описание эксперимента.

Каждая физическая величина имеет свою  
 аномальную размерность

$$A(\mathbf{r}) \sim 1/r^a; \quad \underline{r > \xi \rightarrow A(\mathbf{r}) \sim \kappa^a.}$$

Параметр порядка

$$G(R) = \langle (\Phi_{\mathbf{r}_1})(\Phi_{\mathbf{r}_2}) \rangle \sim \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{1+\eta}}$$

$$\Phi(\mathbf{r}) \sim 1/r^{(1+\eta)/2} \sim \underline{\kappa^{(1+\eta)/2}}$$

Среднее значение параметра порядка ниже перехода

$$\underline{\langle \Phi \rangle = \Phi_0 \tau^\beta; \beta = \nu(1 + \eta) / 2}$$

Обычно  $\Phi_0 \sim \Phi(T = 0) / 2$

Примеры

Ферромагнетик  $M = M_0 \tau^{0.33}$

Антиферромагнетик, Интенсивность Брэгговского пика

$$\underline{I \sim S_0^2 \tau^{2\beta}; 2\beta \approx 0.67.}$$

## Внешнее поле

Слабое поле  $\langle \Phi \rangle \gg \chi h$       Сильное поле  $\langle \Phi \rangle \ll \chi h$ .

Размерность поля  $h \sim \langle \Phi \rangle / \chi \sim \kappa^{(5-\eta)/2} \approx \kappa^{5/2}$

---

## Ферромагнетик

Характерное поле  $H_C = T_C(\kappa a)^{(5-\eta)/2} \simeq \underline{T_C \tau^\delta}$ ;

Индекс поля  $\underline{\delta = (5 - \eta)\nu/2 \simeq 5/3}$

Слабое поле:  $H < H_C$       Сильное поле  $H > H_C$ .

Переход к сильному полю  $\tau_c(H) \approx (H / T_C)^{3/5}$

Пример-железо:  $T_C = 1043\text{K} = 780\text{T}$ .

$\tau = 10^{-3}$ ;  $H_C \approx 80$  Эрстед!



# ТЕПЛОЕМКОСТЬ

$$C = \frac{T^2}{V \langle (\Delta T)^2 \rangle}$$

$$V \sim 1/\kappa^3; \langle (\Delta T)^2 \rangle \sim (T - T_C)^2$$

$$C \sim 1/\tau^\alpha; \alpha = 2 - 3\nu$$

---

# РЕЗЮМЕ

$$R_C = 1/\kappa \sim 1/\tau^\nu$$

$$\chi \sim 1/\kappa^{2-\eta} \sim 1/\tau^\gamma$$

$$\langle \Phi \rangle \sim \kappa^{(1+\eta)/2} \sim \tau^\beta$$

$$C \sim \kappa^3 / \tau^2 \sim \tau^{-\alpha}; \alpha = 2 - 3\nu$$

$$H_C \sim \kappa^{(5-\eta)/2} \sim \tau^\delta; \delta = \nu(5-\eta)/2$$

Два НЕЗАВИСИМЫХ индекса:  $(\nu, \eta)$  или  $(\nu, \gamma)$

Тождество скелинга:  $2\beta + \alpha + \gamma = 2$

Киральный антиферромагнетик  $C s M n B r_3$

$2\beta_C + \alpha + \gamma_C = 2.12(9)$  В.П.Плахтий и др..

## К РОССОВЕР (Смена режима)

Реальные системы: конкуренция взаимодействий с  
разной симметрией

Простейший пример: ферромагнетик с анизотропией  
легкая ось

$$H = -(1/2) \sum J_{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|} \mathbf{S}_{\mathbf{R}_1} \cdot \mathbf{S}_{\mathbf{R}_2} - A \sum (S_{\mathbf{R}}^z)^2$$

$J \gg A$  Первое слагаемое обеспечивает  
ферромагнетизм,

второе намагниченность по оси  $Z$

Вдали от перехода флуктуации не знают об анизотропии

$$G_{xx}(r) = G_{yy}(r) = G_{zz}(r)$$

Неограниченный рост корреляций при приближении к переходу сохраняется только вдоль Z

Флуктуации становятся ИЗИНГОАСКИМИ

$$G_{zz} = \frac{\Lambda}{q^2 + \kappa_I^2}; \quad G_{xx} = G_{yy} = \frac{\Lambda}{q^2 + \kappa_{\perp}^2}$$

Переход (кроссовер) от Гайзенберга к Изингу происходит при

$$\tau_{Cr} = \left( \frac{A}{T_C} \right)^{1/\phi}; \quad \phi \simeq 1.25 \quad \text{индекс кроссовера}$$

$$\tau < \tau_{Cr} \rightarrow \kappa_{\perp} = \kappa(\tau_{Cr}); \kappa_{\parallel} \sim \tau^{\nu_I} \rightarrow 0$$

# Спиральный магнетик MnSi

Период спирали  $L=17$  nm. Волновой вектор  $k=0.38/\text{nm}$

На расстояниях меньших  $L$  – ферромагнетик

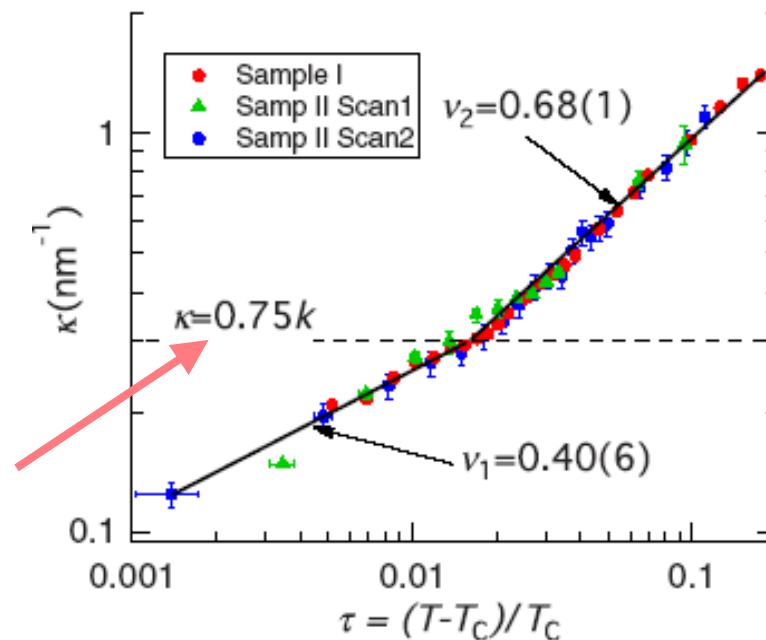
На больших – спираль

Кроссовер при  $\kappa \approx k$ .

С.В.Григорьев,

Е.В.Москвин и

др.



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представления о скелинге, разработанные для фазовых переходов второго рода успешно применяются для описания других систем с сильно взаимодействующими флуктуациями:

Квантовые фазовые переходы

Неупорядоченные системы

Самоорганизованная критичность и т.д.

Наиболее часто используется двойной логарифмический масштаб для определения степенной зависимости измеряемой величины от параметра вблизи критической точки

Григорий Григорьевич Орлов

Основатель  
Гатчины.  
Первый  
хозяин  
Орловой  
Роши



Григорий Григорьевич Орлов, 1734—1813