Школа ПИЯФ ФКС-2011

Рощино

Низкотемпературная сверхпроводимость

Д.Н. Аристов
ПИЯФ, СПбГУ

план лекции

- электроны и фононы, взаимодействие
- куперовская неустойчивость
- модель БКШ, щель в спектре, Tc
- скачок в теплоемкости, эффект Мейснера
- функционал Гинзбурга-Ландау

«Как мы все понимаем,
если есть λ,
то есть и Δ...»

из фольклора

Немного истории

- Камерлинг-Оннес, 1911 ртуть при $T<4K$.   разрушение СП магнитным полем, также разрушение сильным током
- Эффект Мейснера, 1933, выталкивание поля из образца - левитация, глубина проникновения 10^{-5} см
- Скачок теплоемкости при Tc, фазовый переход 2-го рода
- Изотоп эффект: $T_c \sim M^{-1/2}$: Механизм - взаимодействие с фононам, Frölich 1950
- Эффективное притяжение: БКШ (BCS)

Bardeen, Cooper, Schrieffer 1957 ; Боголюбов 1958

Электроны и фононы

электроны - это e, «r»
ядра - это n, «R»
заряд иона = Z_j

$$\mathcal{H} = K_e + K_n + U_{ee} + U_{en} + U_{nn} \,,$$

$$K_e = -\frac{1}{2m_e}\sum_i^N \frac{\partial^2}{\partial r_i^2}\,, \qquad K_n = -\sum_j^{N_1} \frac{1}{2M_j}\frac{\partial^2}{\partial R_j^2}\,,$$

$$U_{ee} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^N \frac{e^2}{|r_i - r_j|}\,, \qquad U_{en} = \sum_i^N\sum_j^{N_1} \frac{e^2 Z_j}{|r_i - R_j|}\,,$$

$$U_{nn} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{N_1} \frac{e^2 Z_i Z_j}{|R_i - R_j|}$$

т.о. все определяется кулоновским отталкиванием, но в силу большой разницы в массе между электронами и ядрами, последние движутся медленнее, описываются в терминах колебаний решетки и могут служит источником эффективного притяжения для электронов.

$$|e| = \hbar = m_e = 1,\ M_j \sim 10^3 - 10^5$$

здесь мы перешли к атомной системе единиц, которая экономит запись формул.

Born-Oppenheimer

Электроны и фононы
приближение Борна-Оппенгеймера

атомная единица энергии = 27.2 eV
1 eV = 11 000 K, a = межатомное расст.,
скорость звука s в твердых телах - порядка км/с
w_d - энергия Дебая, характеризующая колебания решетки, обычно порядка 10 meV

Типичная энергия электронов:

$$\langle K_e \rangle \sim E_F \sim 1\,\mathrm{eV}\,,$$

$$\langle K_e \rangle \simeq \langle U_{ee} \rangle \sim \frac{e^2}{a} \sim 0.1\,\text{a.e.} \sim 1\,\mathrm{eV}$$

Типичная энергия в решетке:

$$\langle K_n \rangle \sim \omega_D = sa^{-1} \sim \sqrt{\frac{e^2}{aM}}\,\frac{1}{a} \sim \frac{\langle K_e \rangle}{\sqrt{M}}$$

Малый параметр теории:

$$\alpha = \frac{\omega_D}{E_F} \sim \frac{1}{\sqrt{M}} \sim 10^{-2}$$

Электроны и фононы

Разложение по степеням смещений: $R_j = R_j^0 + u_j$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \ \ldots \\
\mathcal{H}^{(0)} &= K_e + U_{ee} + (U_{en} + U_{nn})\Big|_{\{R_j = R_j^0\}}\,, \\
\mathcal{H}^{(1)} &= \sum_j \frac{\partial (U_{en} + U_{nn})}{\partial R_j^\alpha}\, u_j^\alpha\,, \\
\mathcal{H}^{(2)} &= K_n + \frac{1}{2}\sum_{j\ell} u_j^\alpha \frac{\partial^2 (U_{en} + U_{nn})}{\partial R_j^\alpha\, \partial R_\ell^\beta}\, u_\ell^\beta\,.
\end{aligned}$$

на первом этапе учитываются внутренние электроны, которые экранируют заряд ядра и не участвуют в электрическом токе. после этого рассматриваем ионы (большая масса, но малый заряд). затем нужно совместно учитывать коллективизированные электроны проводимости и ионы. одновременный учет электрон-ионного и ион-ионного взаимодействия - это отдельная сложная задача, которая выполняется с помощью отработанных численных методов.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \mathcal{H}^{(0)} + \mathcal{H}^{(1)} + \mathcal{H}^{(2)} + \ \ldots \\
\mathcal{H}^{(0)} &= K_e + U_{ee} + (U_{en} + U_{nn})\Big|_{\{R_j = R_j^0\}}\,, \\
\mathcal{H}^{(1)} &= \sum_j \frac{\partial (U_{en} + U_{nn})}{\partial R_j^\alpha}\, u_j^\alpha\,, \\
\mathcal{H}^{(2)} &= K_n + \frac{1}{2} \sum_{j\ell} u_j^\alpha \frac{\partial^2 (U_{en} + U_{nn})}{\partial R_j^\alpha\, \partial R_\ell^\beta}\, u_\ell^\beta\ .
\end{aligned}
$$

- решается $\mathcal{H}^{(0)}$, для энергий $E \geq \omega_C > \omega_D$
- решается $\mathcal{H}^{(2)}$, для энергий $E \leq \omega_D$
  используется $U_{en} + U_{nn}$ из 1й части
- находится $\mathcal{H}^{(1)}$, $U_{en} + U_{nn}$- также из 1й части

Электроны и фононы

Таким образом «интегрируются» высокие энергии; приходим к модели где электроны обладают остаточным взаимодействием (иначе все металлы бы сверхпроводили) и «определены» в полоске энергий возле энергии Ферми, $|E| \leq \omega_C$

Интересуемся явлениями на малых энергиях,

$$|E| \sim T \ll \omega_D$$

Иерархия масштабов:

$$\Delta \ \ll \ \omega_D \ \ll \ \omega_C \ \ll \ E_F$$

$$1\,\mathrm{meV}, \ 10\,\mathrm{meV}, \ 100\,\mathrm{meV}, \ 1\,\mathrm{eV}$$

Электроны и фононы

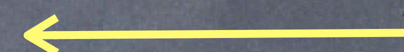
$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e + \mathcal{H}_{ph} + \mathcal{H}_{eph} + \mathcal{H}_{ee}$$

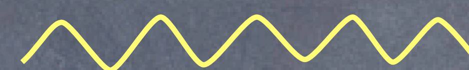
$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \sum_{p\alpha} \varepsilon_p\, a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} + \sum_{p} \omega_p b^+_p b_p \\ &+ \sum_{pq\alpha} v_{p,q} a^+_{p\alpha} a_{q\alpha} \left(b^+_{-p+q} + b_{p-q} \right) \\ &+ \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 p_4 \\ \alpha\beta}} \mu(p_i)\, a^+_{p_1\alpha} a^+_{p_2\beta} a_{p_3\beta} a_{p_4\alpha}\end{aligned}$$

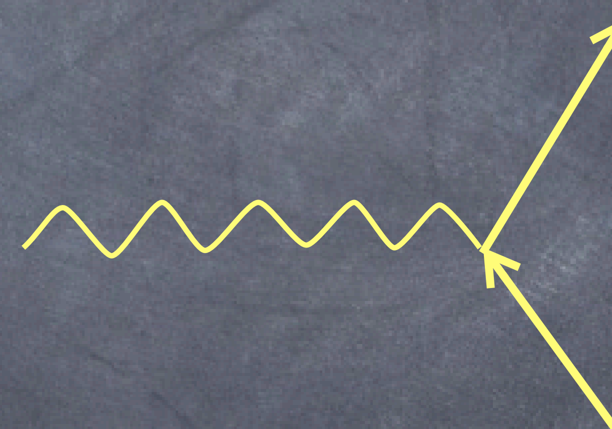
ограничение по энергиям: $|\varepsilon_p| \leq \omega_C$

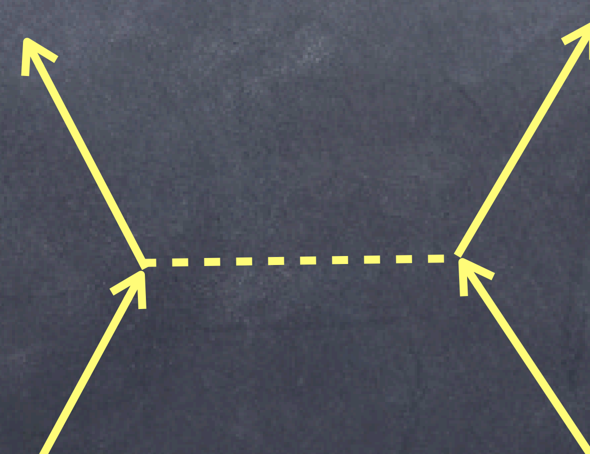
Модель БКШ
(Бардин, Купер, Шриффер)

диаграммы Фейнмана:

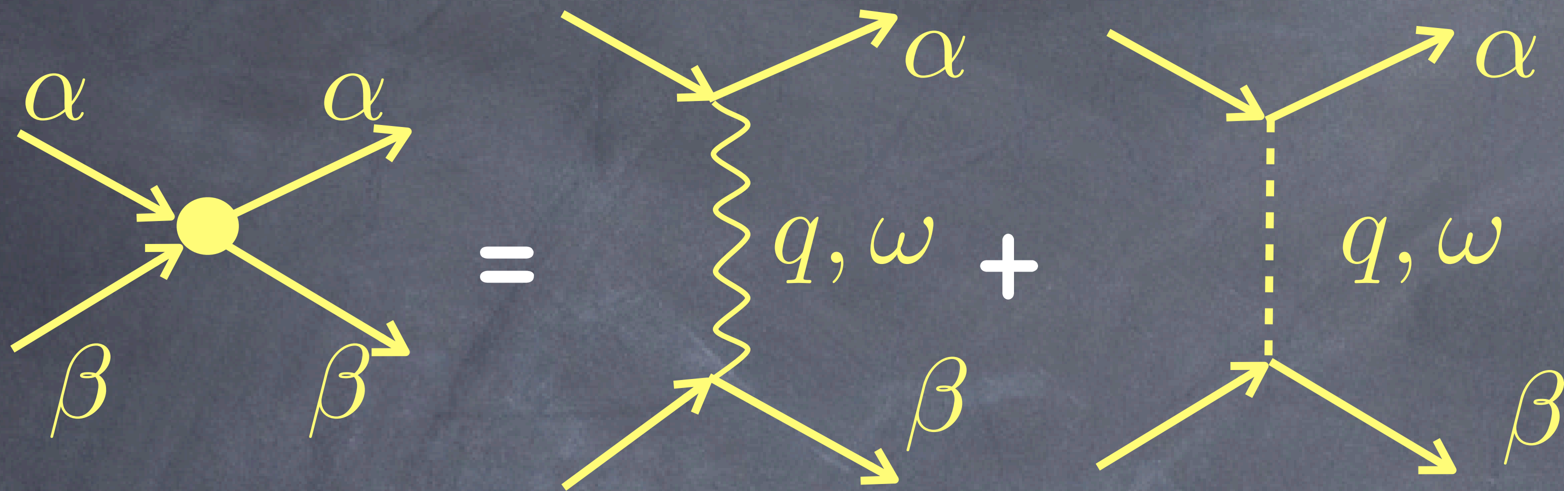
электрон  $\mathcal{H}_e$

фонон  $\mathcal{H}_{ph}$

испускание фонона  $\mathcal{H}_{eph}$

эл.–эл. взаимод.  $\mathcal{H}_{ee}$

Модель БКШ



$$\mathcal{D}(\omega, q) = \sum_j \frac{|v_q^2|}{M} \frac{(\bar{q}\bar{e}_j)(\bar{q}\bar{e}_j^{\,*})}{\omega^2 - \omega_{jq}^2}, \quad v_q \sim \frac{e^2}{a}$$

$$\sim \left(-\frac{e^2}{a}\right), \quad \omega \ll \omega_D$$

эфф.притяжение

$$\sum_{ij} \frac{e^2}{|r_i - r_j|} \rightarrow \frac{e^2}{a} \int dr_1\, dr_2\, \rho(r_1)\rho(r_2)\, \delta(r_1 - r_2)$$

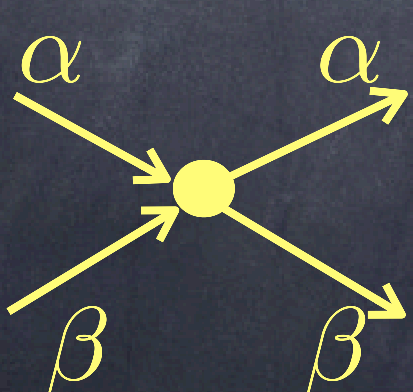
отталкивание

Модель БКШ

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{p\alpha} \varepsilon_p\, a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} + \frac{\lambda}{2}\int d\bar{r}\, a^+_{\alpha}(r) a^+_{\beta}(r)\, a_{\beta}(r) a_{\alpha}(r)\,, \quad \lambda < 0.$$

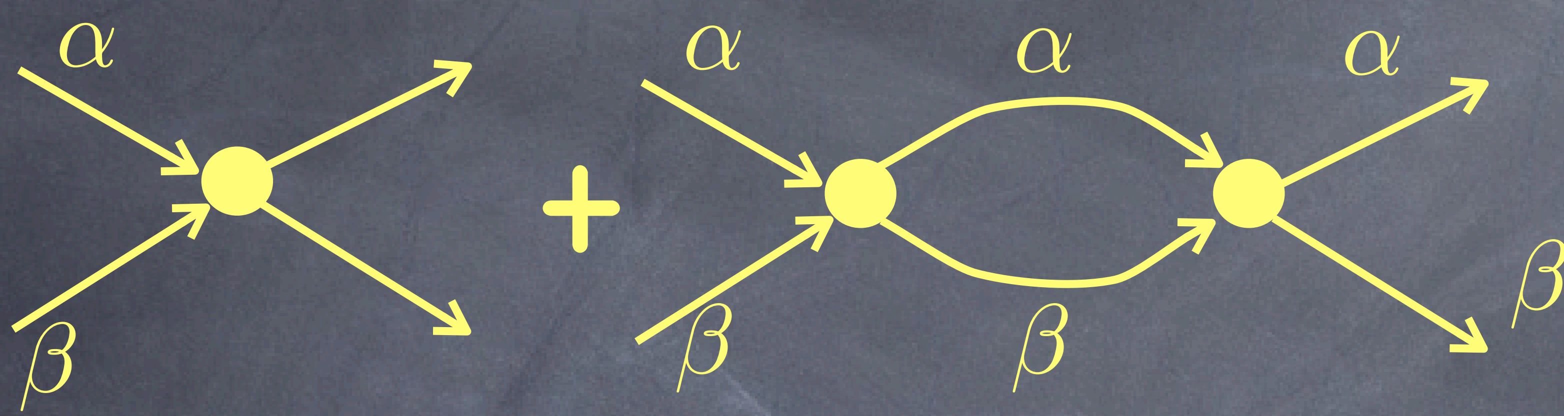
суммирование по спину (αβ);

энергия - в узкой полоске, $|\varepsilon_p - E_F| \le \omega_{\mathcal{D}}$

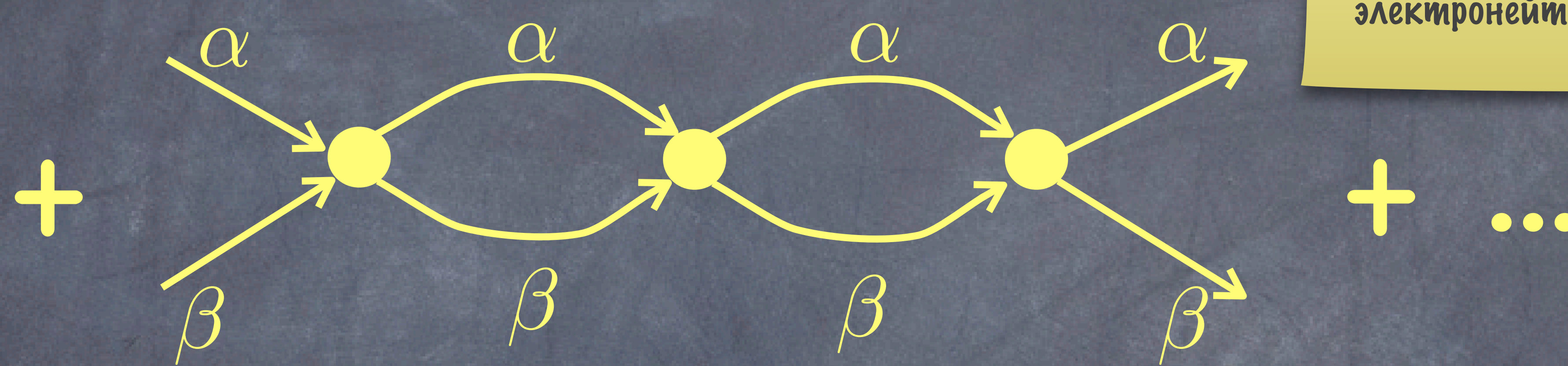


в модели БКШ величина взаимодействия представляется как сумма притяжения через фононы и остаточного отталкивания между «квазичастицами» электронами (квазичастицы - поскольку это электроны, уже «одетые» взаимодействием с ионами и друг с другом). Замечательно то, что к разгадке сверхпроводимости привело наблюдение изотоп-эффекта, то есть зависимость температуры перехода от массы иона при прочих равных условиях. Ясно, что такая зависимость наиболее ясно проявляется лишь в веществах с пренебрежимо малым вкладом от остаточного отталкивания. Можно сказать, что физикам повезло с наблюдением изотоп-эффекта.

Куперовская неустойчивость

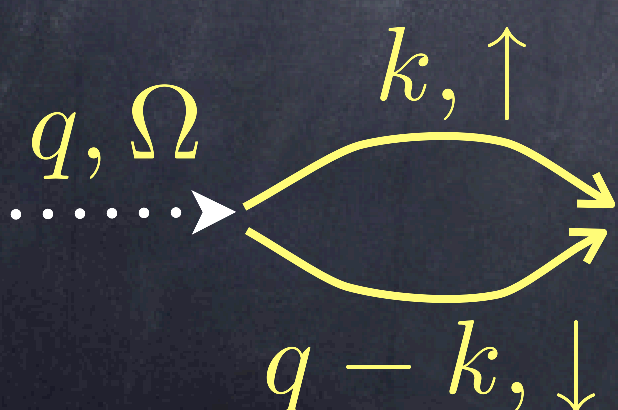


нетривиальность этого рисунка - в сонаправленности стрелок. это соответсвует рождению пар квазичастиц «электронов», что конечно является виртуальным процессом и не соответствует реальному нарушению электронейтральности кристалла.



$$= \lambda + \lambda^2 \Pi_C + \lambda^3 \Pi_C^2 + \ldots = \boxed{\frac{\lambda}{1 - \lambda \Pi_C}}$$

в куперовской паре участвуют электроны с разнонаправленными импульсами (латинские буквы) и спинами (стрелки, греческие буквы)



$$\Pi_C(q = 0, \Omega = 0) = -\frac{\nu_F}{2} \ln \frac{2\omega_D \gamma}{\pi T}$$

$$\gamma \simeq 1.78$$

Куперовская неустойчивость

$$\lambda \to \frac{\lambda}{1-\lambda\Pi_C} = \lambda \frac{1}{1+\lambda\frac{\nu_F}{2}\ln\frac{2\omega_D\gamma}{\pi T}} \simeq -\frac{2}{\nu_F}\frac{T_c}{T-T_c}$$

при $$T \simeq T_c = \frac{2\gamma}{\pi}\omega_D\, e^{-2/(|\lambda|\nu_F)}$$

мы видим, что «одетое» или «перенормированное» взаимодействие становится очень большим с понижением температуры до температуры перехода (которая, однако, экспоненциально мала). это означает, что нарушается наше исходное предположение, о том, что взаимодействие м.б. рассмотрено как малое возмущение.

Необходимость перестройки основного состояния металла.
БКШ, Боголюбов (1958)

сверхпроводящий металл

$$\lambda\, a^+_{1\uparrow} a^+_{2\downarrow} a_{3\downarrow} a_{4\uparrow} \to \lambda a^+_{1\uparrow} a^+_{2\downarrow} \langle a_{3\downarrow} a_{4\uparrow} \rangle + \lambda \langle a^+_{1\uparrow} a^+_{2\downarrow} \rangle a_{3\downarrow} a_{4\uparrow}$$

$$\to \Delta a^+_{p\uparrow}\, a^+_{-p\downarrow} + \Delta^* a_{p\downarrow}\, a_{-p\uparrow}$$

выделение термодинамически большого среднего числа пар в основном состоянии системы - оправдано как хорошее стартовое приближение. мы платим за это необычным свойством несохранения числа квазичастиц.

на уровне «среднего поля»:
несохранение числа квазичастиц,
появление конденсата куперовских пар

$$\mathcal{H} = \sum_p (\varepsilon_p\, a^+_{p\uparrow} a_{p\uparrow} + \varepsilon_p\, a^+_{p\downarrow} a_{p\downarrow} + \Delta\, a^+_{p\uparrow}\, a^+_{-p\downarrow} + \Delta^* a_{p\downarrow}\, a_{-p\uparrow})$$

Преобразование Боголюбова

$$\begin{cases} a_{p\uparrow} \; = \; u_p c_{p\uparrow} + v_p c^+_{-p\downarrow} \\ a^+_{-p\downarrow} \; = \; -v^*_p c_{p\uparrow} + u_p c^+_{-p\downarrow} \end{cases}$$

а - операторы исходных квазичастиц
с - операторы «истинных» квазичастиц в СП состоянии.

$$\left\{a_{p\alpha}, a^+_{p'\beta}\right\} \quad = \quad \delta_{pp'}\delta_{\alpha\beta} = \left\{c_{p\alpha}, c_{p'\beta}\right\}$$

отсюда $\Longrightarrow \quad u_p^2 + |v_p|^2 \; = \; 1$

Новые квазичастицы над СП основным состоянием. Вид (u,v) можно определить методом вариации энергии (Абрикосов, Халатников '58)

$$\frac{\delta}{\delta v_p} \left\langle \mathcal{H} - \mu N \right\rangle \; = \; 0$$

переписываем гамильтониан в новых операторах с и требуем его диагональности, варьируем и налагаем условие связи на (u,v) ,

Уравнение на щель

$$\Delta = (-\lambda) \sum_q u_q v_q (1 - n_{q\downarrow} - n_{q\uparrow})$$

$$u_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon_p}{E_p}\right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varepsilon_p}{E_p}\right),$$

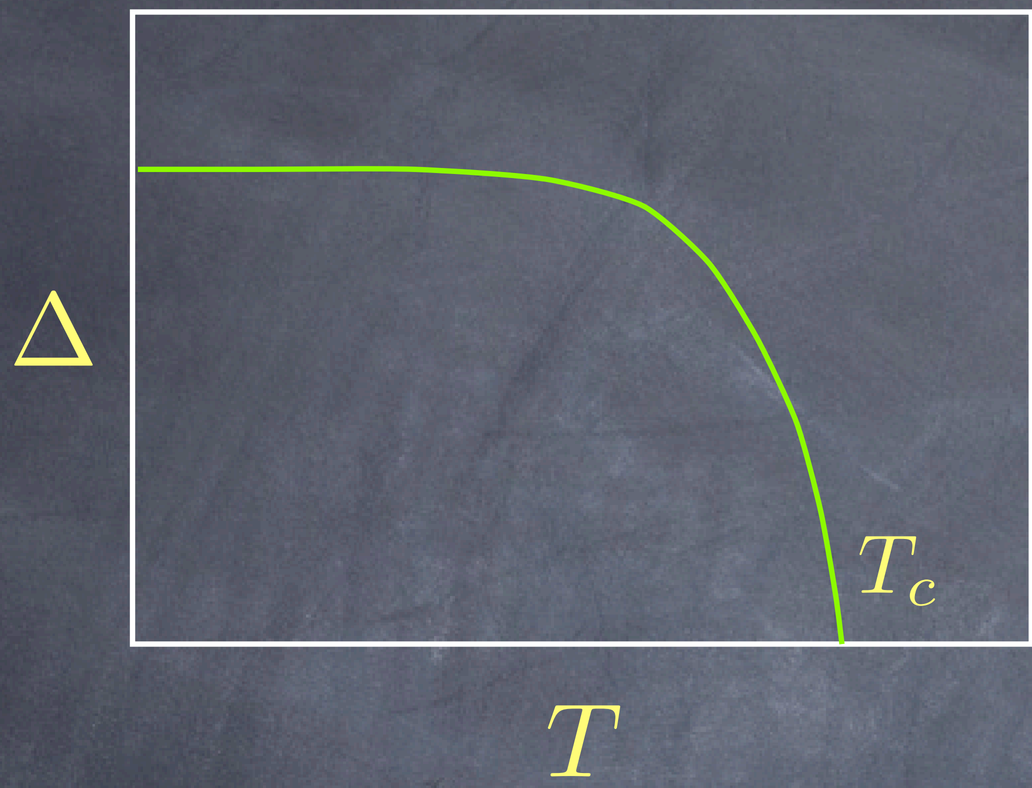
Энергия квазичастицы $\boxed{E_p = \sqrt{\varepsilon_p^2 + \Delta^2}}$

$$\Delta = |\lambda| \sum_p \frac{\Delta}{2\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_p^2}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon_p^2}}{2T}\right)$$

или

$$1 = |\lambda| \frac{\nu_F}{2} \int_0^{\omega_D} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}} \operatorname{th}\left(\frac{\sqrt{\Delta^2 + \varepsilon^2}}{2T}\right)$$

Уравнение на щель



$$\Delta(T=0) \;=\; \frac{\pi}{\gamma}T_c \;=\; 1.76\,T_c$$

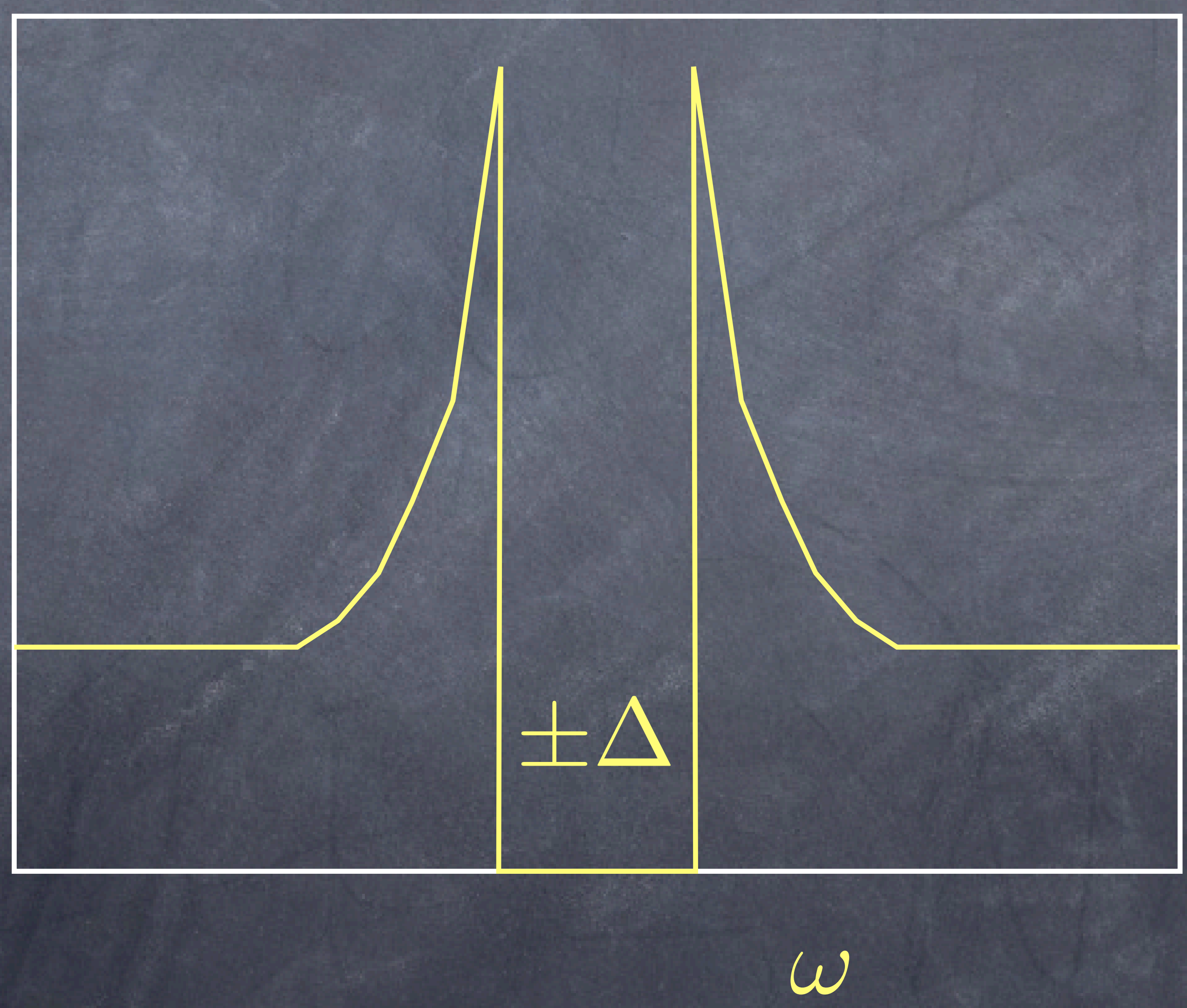
при аккуратном выводе Tc из уравнения на щель (т.е. T при которой щель =0) получается такой же, как и из условия куперовской неустойчивости.

Возле Tc $\quad \Delta \simeq 3.06\sqrt{T_c(T_c-T)}$

фазовый переход 2 рода в теории Ландау,
Δ - параметр порядка

туннельная плотность состояний

$$\rho(\omega) = \sum_p \mathcal{A}(\omega, p) = \nu_F \frac{|\omega|}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}$$

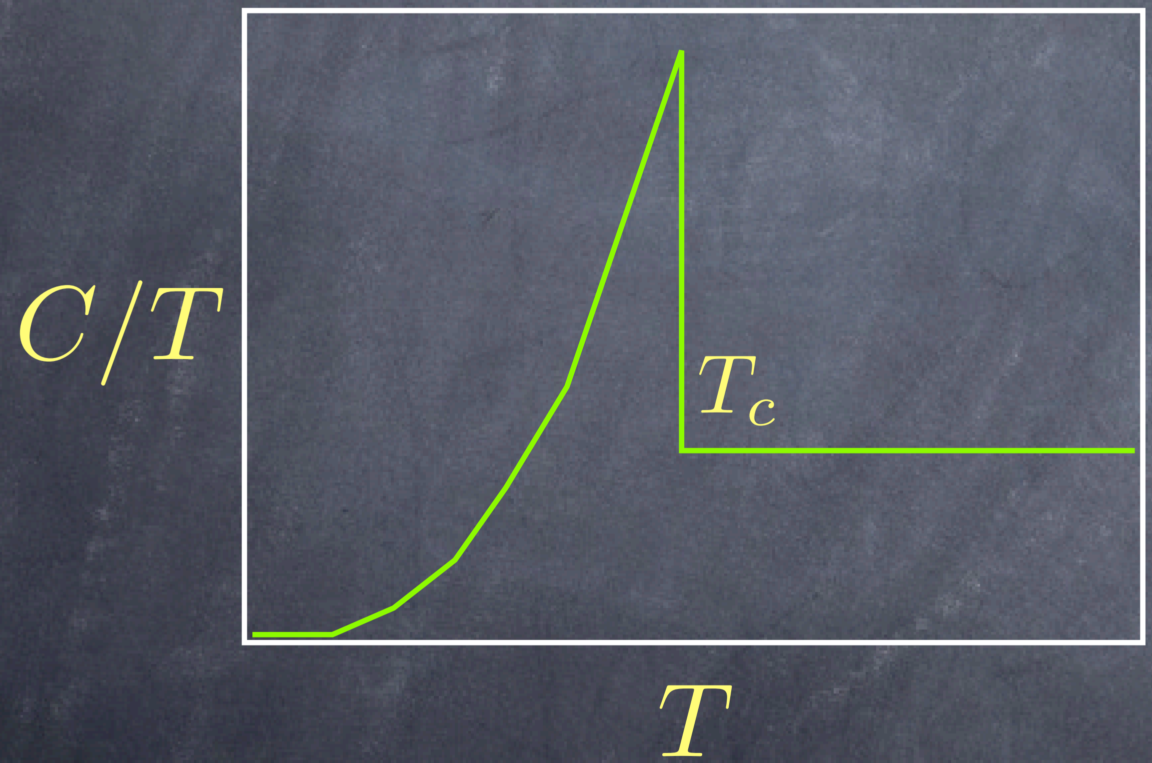


такая величина определяется экспериментально, изучая туннельный ток из металлического зонда в сверхироводник, как функцию напряжения смещения

Скачок в теплоемкости

$$C \quad = \quad T\,\frac{\partial^2}{\partial T^2}\langle \mathcal{H} - \mu N\rangle$$

в нормальном металле $\qquad C \sim T$



резкий скачок при Tc,
затем экспоненциальное убывание с понижением температуры

величина скачка - универсальна, т.е. не зависит от деталей теории !

$$\left.\frac{C_n + C_S}{C_n}\right|_{T=T_c} = 1 + \frac{12}{7}\,\frac{1}{\zeta(3)} \simeq 2.42$$

Эффект Мейснера (Meißner, 1933)

$$j \;=\; \sigma E \;=\; \left(\sigma\,\frac{dA}{dt}\right) \;=\; i\omega\sigma(\omega)\,A(\omega);$$

$$\sigma(\omega) \;=\; \frac{1}{i\omega}\,\frac{\langle\, j(\omega)\rangle}{A(\omega)}$$

эта формула в теории линейного отклика становится т.н. формулой Кубо.
подразумеваем кулоновскую калибровку вектор-потенциала A и отсутствие скалярного пот. поля

если $\langle\, j(\omega)\rangle/A(\omega)$ конечна, то $\sigma(\omega\to 0)\to\infty$

электрон в период. потенциале (Peierls; Kohn, Luttinger)

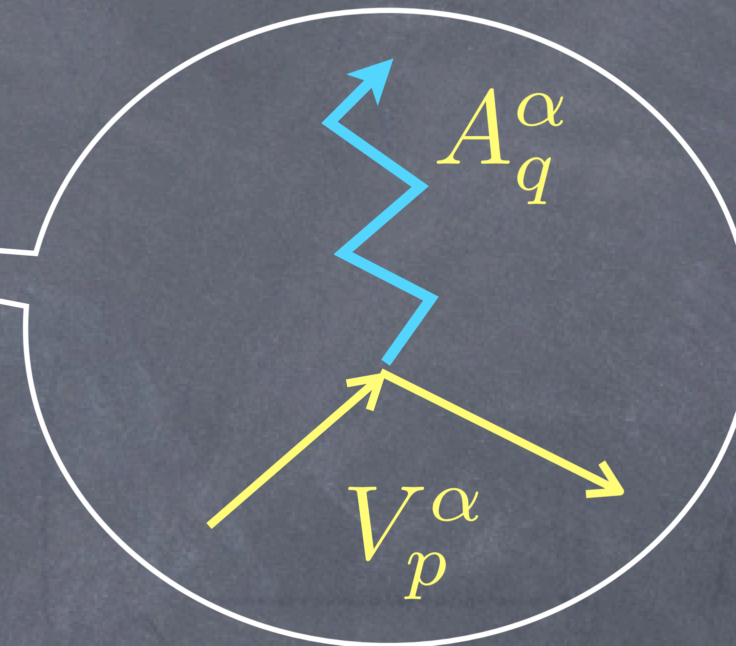
$$\frac{1}{2m}\left(p-\frac{e}{c}\,A\right)^2 \;\to\; \varepsilon(p-eA/c)$$

$$\to\;\; \varepsilon_p\, a^+_p a_p - \frac{e}{c}\, a^+_{p+q/2} a_{p-q/2} A^\alpha_q\,\frac{\partial\varepsilon_p}{\partial p^\alpha}$$

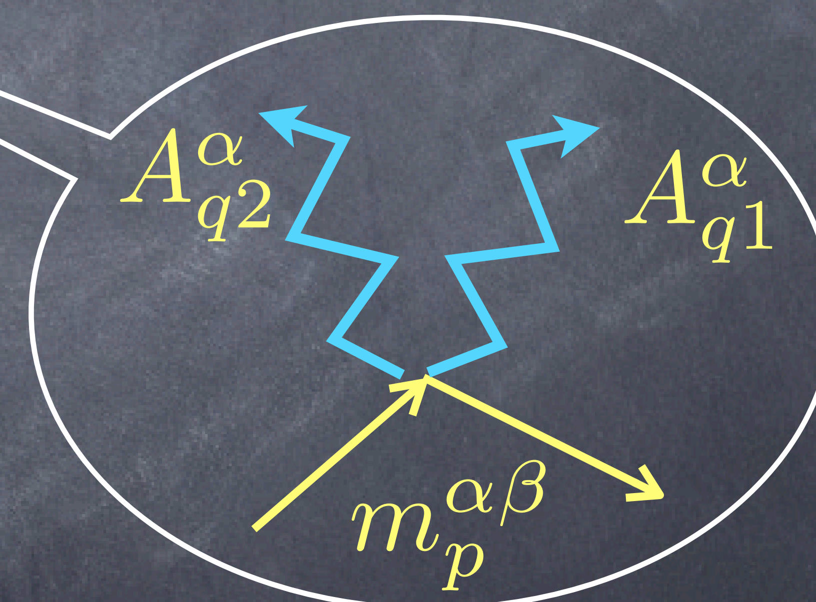
$$+\;\frac{e^2}{2c^2}\,a^+_{p+\frac{q_1+q_2}{2}}\,a_{p-\frac{q_1+q_2}{2}}\,A^\alpha_{q_1}\,A^\beta_{q_2}\,\frac{\partial^2\varepsilon_p}{\partial p^\alpha\,\partial p^\beta}$$

Эффект Мейснера

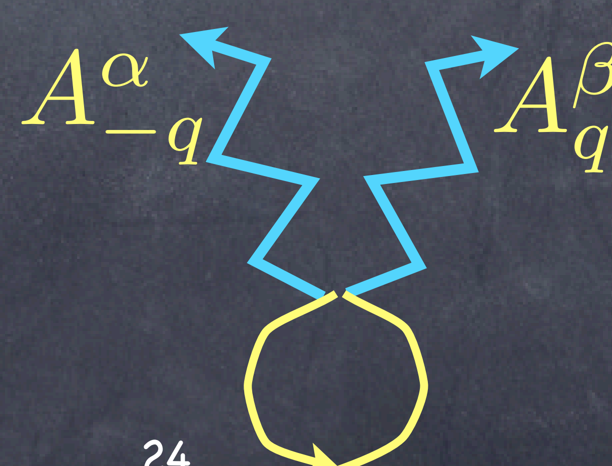
$$\varepsilon_p\, a_p^+ a_p - \frac{e}{c}\, a^+_{p+q/2} a_{p-q/2} A_q^\alpha\, \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial p^\alpha}$$



$$+\ \frac{e^2}{2c^2}\, a^+_{p+\frac{q_1+q_2}{2}}\, a_{p-\frac{q_1+q_2}{2}}\, A^\alpha_{q_1} A^\beta_{q_2} \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial p^\alpha \partial p^\beta}$$

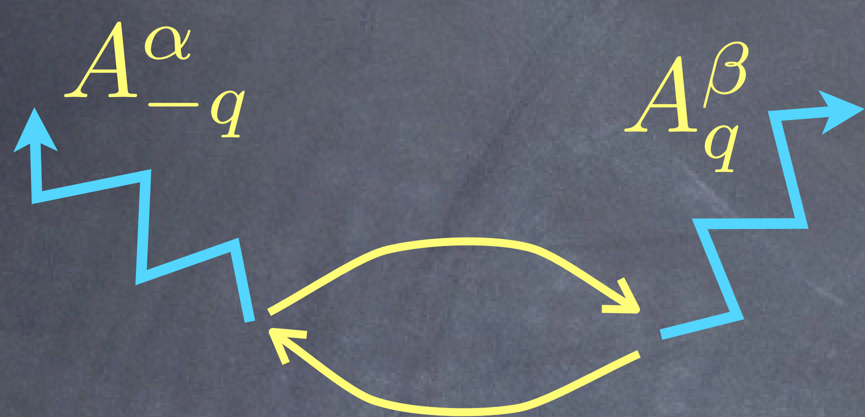


$$\langle j_q^\alpha \rangle = -c \frac{\partial}{\partial A^\alpha_{-q}} \langle \mathcal{H} - \mu N \rangle$$

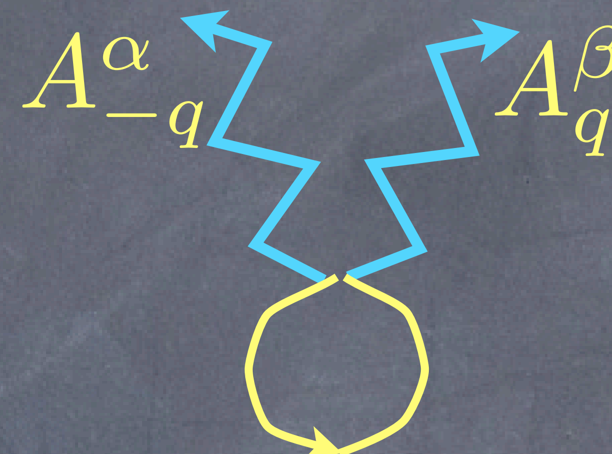


Эффект Мейснера

нормальный металл, в пределе ω-> 0 :



+

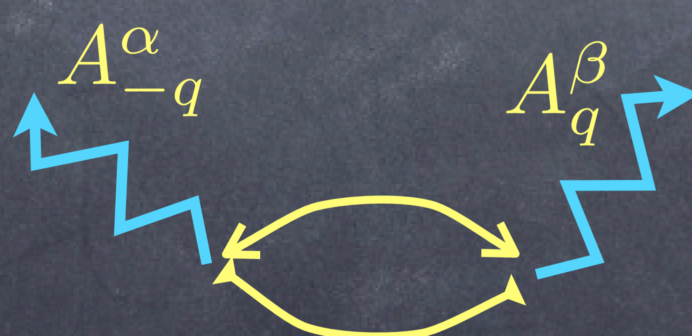


= 0

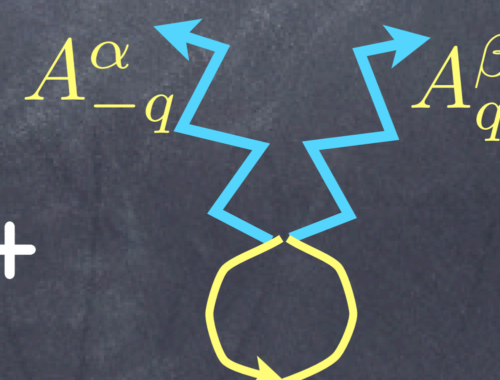
тождество Уорда, закон сохранения заряда.

СП металл - несохранение числа квазичастиц

+



+



≠ 0

$$\langle a^{+}_{p\uparrow} a^{+}_{-p\downarrow} \rangle \neq 0$$

диаграмма типа «рыба»

диаграмма типа «головастик»

Эффект Мейснера

ток в СП металле, предел T-> 0 :

$$\langle j_q^\alpha \rangle = 2\frac{e^2}{c}A_q^\beta \sum_p \boxed{\left(V_p^\alpha V_p^\beta \frac{E_{p+}E_{p-} - \varepsilon_{p+}\varepsilon_{p-} - \Delta^2}{2E_{p+}E_{p-}(E_{p+}+E_{p-})} \right.}$$

$$\left. - \frac{\partial^2 \varepsilon_p}{\partial p^\alpha \partial p^\beta} \frac{E_p - \varepsilon_p}{2E_p} \right)$$

= 0

в этом пределе «головастик» - главный вклад. он обычно называется диамагнитным вкладом, ввиду своего знака и физических следствий.

изотропная модель:

$$\langle \mathbf{j}_{q\simeq 0} \rangle = -\frac{e^2}{mc} n \mathbf{A}_{q\simeq 0}$$

London & London (1935)

1) расходимость проводимости

2) выталкивание поля из металла

эти два свойства - проявление одного явления

Эффект Мейснера

выталкивание поля из СП образца

$$\langle \mathbf{j}_{q\simeq 0}\rangle \;=\; -\frac{e^2}{mc}\, n\mathbf{A}_{q\simeq 0}$$

$$\frac{4\pi}{c}\, j \;= \mathrm{rot}\ B \;=\; \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ A$$ ур. Максвела

$$\left(\nabla^2 - \frac{4\pi}{c}\frac{e^2}{mc}\, n\right) A^\alpha \equiv \left(\nabla^2 - \delta^{-2}\right) A^\alpha = 0$$

лондоновская

глубина проникновения

$$B(x) = B(0)\exp(-x/\delta)$$

экспон. убывание вглубь образца

поскольку вглубь поле не проникает, то ему приходится сгущаться возле границ образца. это невыгодно по энергии и приводит к эффекту выталкивания образца из области поля.

функционал Гинзбурга-Ландау

$$\int \mathcal{D}\{a\} e^{-\int_0^\beta d\tau S}$$

один из способов описывать квантовую механику - работать с «интегралами по траекториям», когда в экспоненте суммируются все возможные траектории (конфигурации) системы. читатель может ознакомиться с этим методом в учебниках.

$$S = \sum_p \left(a_p^+ (\partial_\tau) a_p + \varepsilon_p a_p^+ a_p \right) + \sum_{\{pi\}} \lambda a_{1\uparrow}^+ a_{2\downarrow}^+ a_{3\downarrow} a_{4\uparrow}$$

локальное взаимод.

$$\lambda \int dr \; a_\uparrow^+ a_\downarrow^+ \; a_\downarrow a_\uparrow$$

преобразование Хаббарда-Стратоновича: добавим гауссово интегрирование по вспом. полям

$$\mathcal{D}(X, Y) \exp \left[\int d\tau \, dr \left(\frac{X^2}{\lambda} + \frac{Y^2}{\lambda} \right) \right]$$

это интегрирование ничего не дает для наблюдаемых и делается для нашего дальнейшего удобства. поля определены в каждой точке пространства и (мацубаровского) времени

функционал Гинзбурга-Ландау

$$\mathcal{D}(X,Y)\exp\left[\int d\tau\, dr\left(\frac{X^2}{\lambda}+\frac{Y^2}{\lambda}\right)\right]$$

сдвижка:
$$\begin{aligned} X &= X' + \frac{\lambda}{2}\left(a_\uparrow^+ a_\downarrow^+ + a_\downarrow a_\uparrow\right) \\ Y &= Y' + \frac{\lambda}{2i}\left(a_\uparrow^+ a_\downarrow^+ - a_\downarrow a_\uparrow\right) \end{aligned}$$

$$\frac{X^2}{\lambda}+\frac{Y^2}{\lambda}=\frac{X'^2}{\lambda}+\frac{Y'^2}{\lambda}+(X'+iY')\,a_\downarrow a_\uparrow$$
$$+\,(X'-iY')\,a_\uparrow^+ a_\downarrow^+ + \lambda\, a_\uparrow^+ a_\downarrow^+\, a_\downarrow a_\uparrow$$

комплексный параметр $\Delta = X + iY$

сокращает взаимодействие

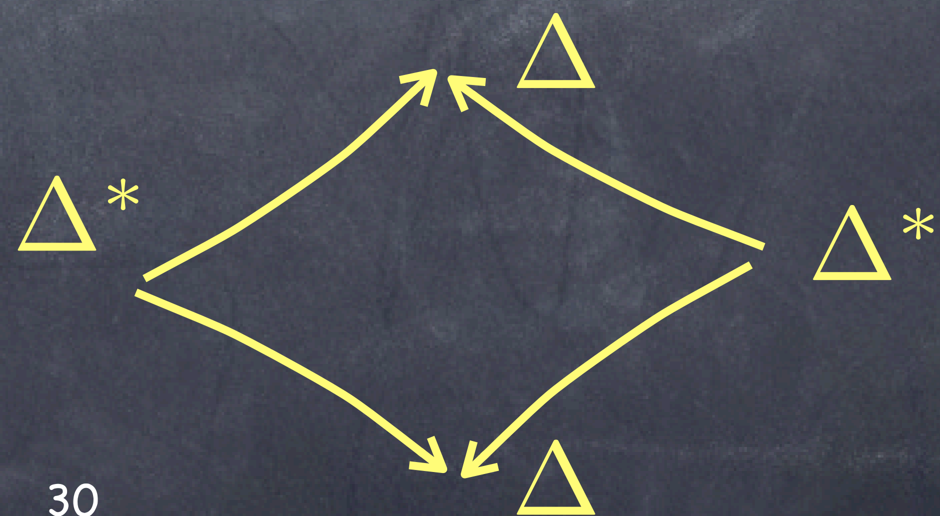
функционал Гинзбурга-Ландау

$$\mathcal{H} = \sum_p \varepsilon_p a^+_{p\alpha} a_{p\alpha} + \int dr \Big(\Delta(r)\, a_\downarrow(r) a_\uparrow(r)$$

$$+\Delta^*(r) a^+_\uparrow(r) a^+_\downarrow(r) - \frac{|\Delta(r)|^2}{\lambda} \Big)$$

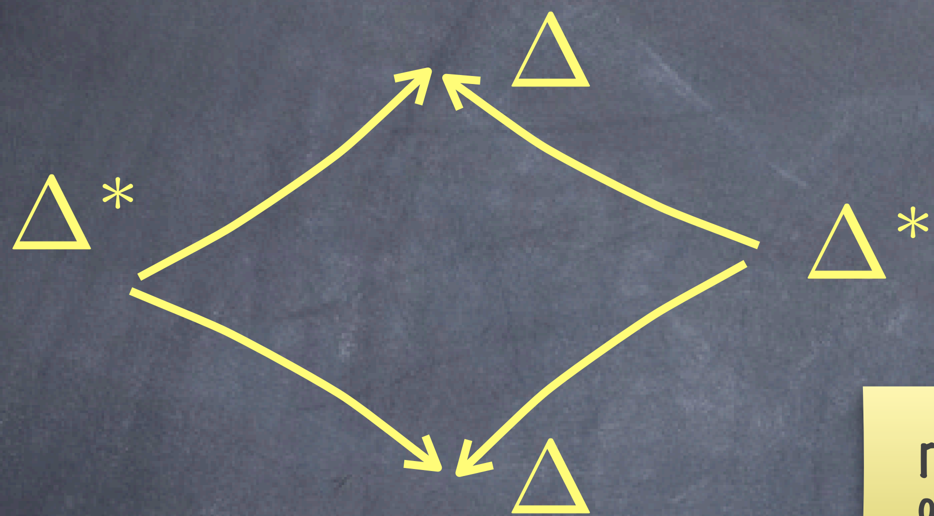
проинтегрируем квадр.действие по фермионам
получаем нелинейное, нелокальное действие по $\Delta(r)$

первые кумулянты для почти однородного $\Delta(r)$



функционал Гинзбурга-Ландау

$$\Pi_C(q) \simeq \Pi_C(0) - \frac{\nu_F}{2}\,\frac{q^2 v^2}{6(\pi T)^2}\,\frac{7\zeta(3)}{8}$$



$$-\frac{\nu_F}{2}\,\frac{1}{(\pi T)^2}\,\frac{7\zeta(3)}{8}$$

Горьков вывел те же формулы в рамках обычного формализма гриновских функций

Горьков 1959

Итого: $$\int \mathcal{D}\Delta\,\mathcal{D}\Delta^*\exp\left(-\beta\int dr\,S_\Delta\right)$$

$$S_\Delta = \Delta^*\left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu_F}{2}\ln\frac{2\gamma\,\omega_D}{\pi T} + \frac{\nu_F}{2}\,\frac{v^2}{6(\pi T)^2}\,\frac{7\zeta(3)}{8}\,(i\nabla)^2\right)\Delta$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{\nu_F}{2}\,\frac{1}{(\pi T)^2}\,\frac{7\zeta(3)}{8}\,|\Delta|^4 + \ldots$$

функционал Гинзбурга-Ландау

$$S_\Delta = \Delta^* \left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu_F}{2} \ln \frac{2\gamma\,\omega_D}{\pi T} + \frac{\nu_F}{2} \frac{v^2}{6(\pi T)^2} \frac{7\zeta(3)}{8} (i\nabla)^2 \right) \Delta + \frac{1}{2} \frac{\nu_F}{2} \frac{1}{(\pi T)^2} \frac{7\zeta(3)}{8} |\Delta|^4 + \ldots$$

однородное решение:

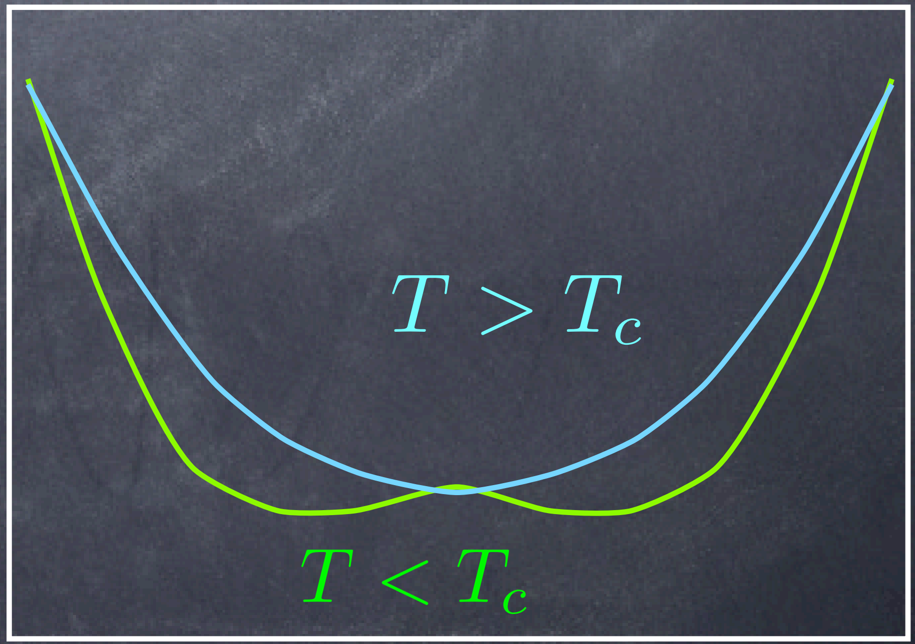
$$-\frac{1}{\lambda} - \frac{\nu_F}{2} \ln \frac{2\gamma\,\omega_D}{\pi T} = \frac{\nu_F}{2} \ln \frac{T}{T_C} \simeq \frac{\nu_F}{2} \frac{T - T_C}{T_C} \equiv \frac{\nu_F}{2} \tau$$

вблизи Tc

вот такой вот двухъямный потенциал :)

$$\frac{\nu_F}{2} \left(\tau\, |\Delta|^2 + \frac{1}{2} \frac{7\zeta(3)}{8(\pi T_C)^2} |\Delta|^4 \right)$$

=> $$\Delta = \pi T_C \sqrt{\frac{8}{7\zeta(3)}}\, \sqrt{-\tau}$$



функционал Гинзбурга-Ландау

к безразмерным величинам :

$$\Delta = \left(2m\frac{\nu_F}{4}\,\frac{v^2}{6(\pi T_C)^2}\,\frac{7\zeta(3)}{8}\right)^{-1/2}\Psi$$

при наличии э.-м. поля:

$$\Psi^*\frac{1}{4m}\left(-i\nabla - 2\frac{e}{c}A\right)^2\Psi + ar|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{8\pi}B^2$$

где $a \sim T - T_c$

этот функционал, связывающий сверхпроводящий локальный параметр порядка и э.-м. поле, является главным инструментом анализа проникновения поля в сверхпроводник.

- $T \ll W_D \ll E_F$ (Борн-Оппенгеймер)
- гамильтониан Фрелиха
- фононы => притяжение в куперовском канале => неустойчивость осн.состояния
- гамильтониан БКШ, конденсат куперовских пар
- щель в спектре, скачок теплоемкости, эффект Мейснера= 0 сопротивления

литература

- А.А. Абрикосов, Основы теории металлов. Москва, Наука, 1987.
- Дж. Шриффер, Теория сверхпроводимости. Москва, ИЛ, 1970.
- Helmut Eschrig, Microscopic Theory of Superconductivity, http://www.ifw-dresden.de/institutes/itf/members/helmut

В лекциях Эшрига дается весьма подробный вывод и обоснование гамильтониана БКШ. Достоинством этих лекций является указание на современные методы расчетов зонной структуры и электронных систем, возникшие после 1990 года, т.е. в эпоху мощных компьютеров и много лет спустя оригинальной теории, которая может иной раз показаться не вполне обоснованной.

Спасибо за внимание !