

---

# СТРУКТУРА СЛОЖНЫХ СЕТЕЙ И ДИНАМИКА НА НИХ

44-ая Зимняя Школа ПИЯФ по физике  
конденсированного состояния  
Рощино, 15-20 марта 2010

# ПЛАН А

---

- Структура сетей.
  1. Что такое сложная сеть. Примеры.
  2. Основные элементы и характеристики сетей.
  3. Корреляции в сетях. Ассортативность-дисассортативность.
  4. Построение безмасштабной, растущей сети. Пример.

# ПЛАН В

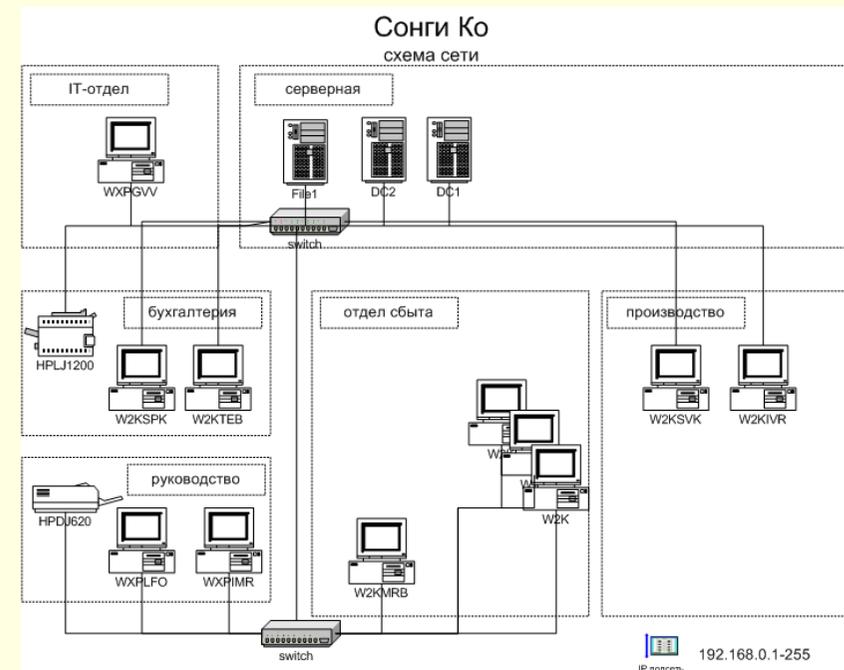
---

- Динамика на сложной сети
  1. Модель Френкеля-Конторовой на сложной сети. Уравнения и интерпретации.
  2. Особенности структуры лавин на ассортативных и дисассортативных сетях.

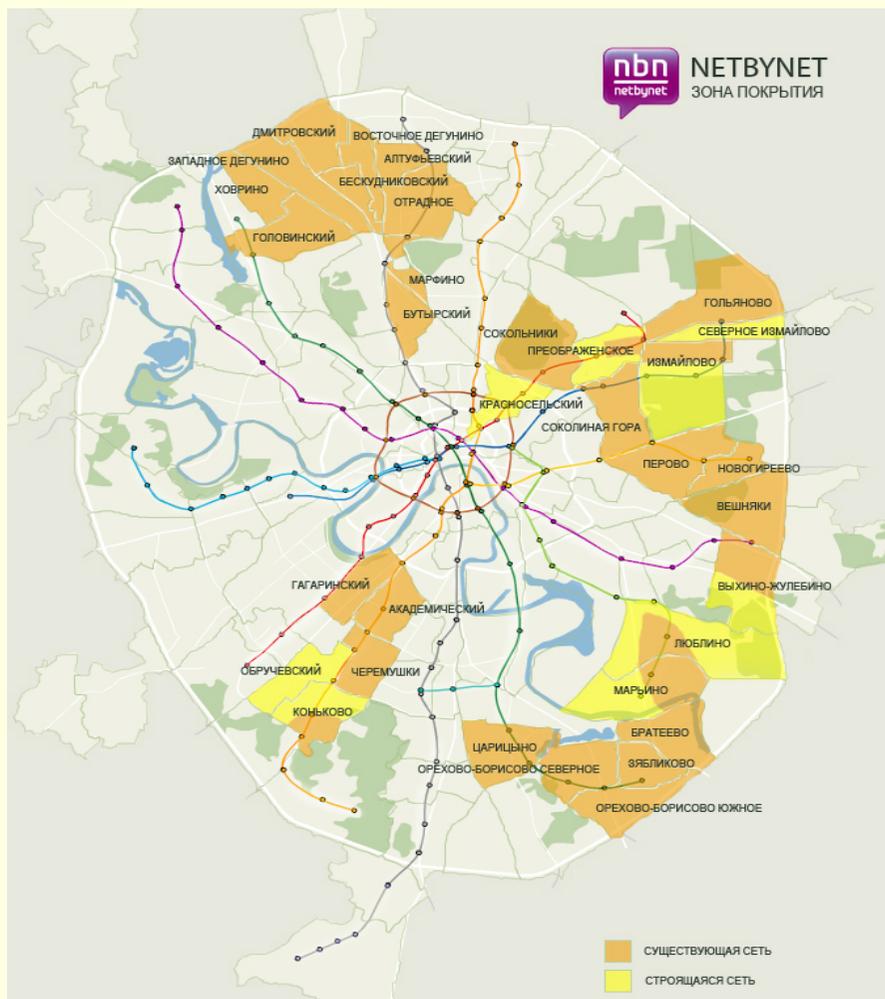
# ПОД СЕТЬЮ

## ■ Что такое сеть?

Совокупность узлов, соединенных связями



# МЫ В СЕТЯХ!

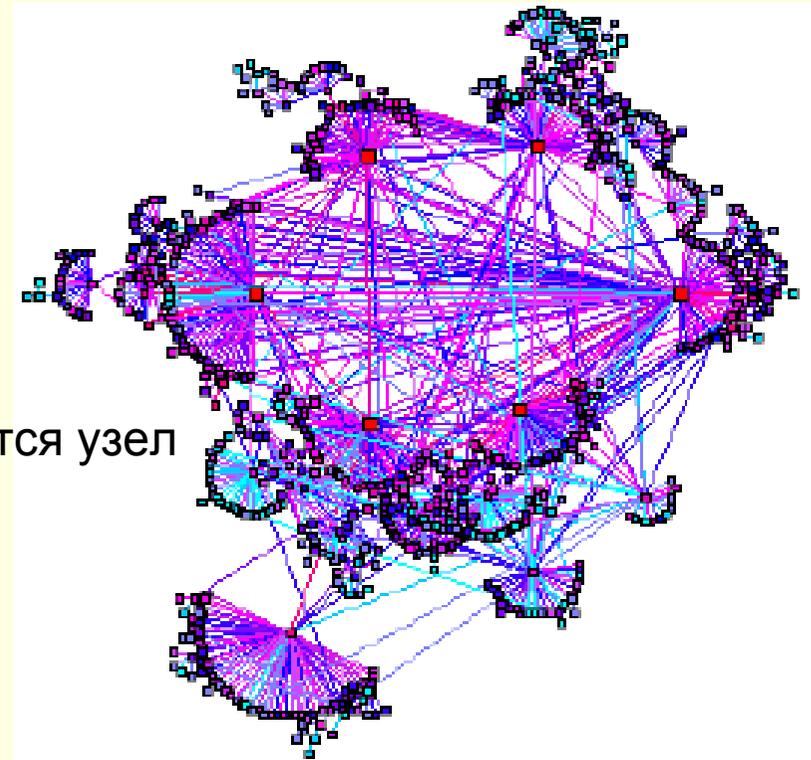


# СТРУКТУРА СЕТИ

$k_i$  - количество связей узла  $i$

$N$  – число узлов

$m$  – число связей, с которыми рождается узел



# ХАРАКТЕРИСТИКИ СЕТИ

- **Функция распределения** числа связей показывает какова доля узлов, имеющих определенное количество связей.

Сеть Эрдоса-Реньи

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

Безмасштабная сеть

$$P(k) \sim \frac{1}{k^\gamma}$$

- **Корреляции** между узлами с определенными значениями  $k$

# АССОРТАТИВНОСТЬ- ДИССОРТАТИВНОСТЬ

- Ассортативность -  
подобное ищет  
подобного



- Дисассортативность –  
скрещивание ужа и ежа



# АССОРТАТИВНОСТЬ- ДИССОРТАТИВНОСТЬ

---

- Ассортативность – связи устанавливаются преимущественно между узлами с одинаковым значением  $k$
- Дисассортативность – узлы с большим значением  $k$  (хабы) в основном связаны с узлами с малым значением  $k$

# АССОРТАТИВНЫЕ И ДИССОРТАТИВНЫЕ СЕТИ

---



Ассортативная сеть



Дисассортативная сеть

# КОЭФФИЦИЕНТ АССОРТАТИВНОСТИ

$$r = \frac{\sum_k e_{kk} - \sum_k a_k b_k}{1 - \sum_k a_k b_k}$$

$e_{lk}$  доля связей, соединяющих узлы с числом связей, равным  $l$  и  $k$

$$a_l = \sum_k e_{lk} \quad b_k = \sum_l e_{lk}$$

Полностью ассортативная сеть:  $\sum_k e_{kk} = 1$   $r = 1$

Ассортативная сеть:  $e_{kk} > a_k b_k$   $r > 0$

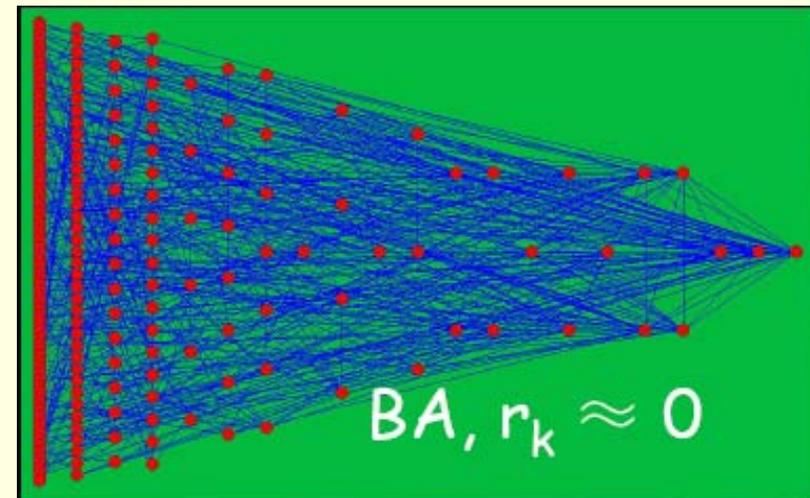
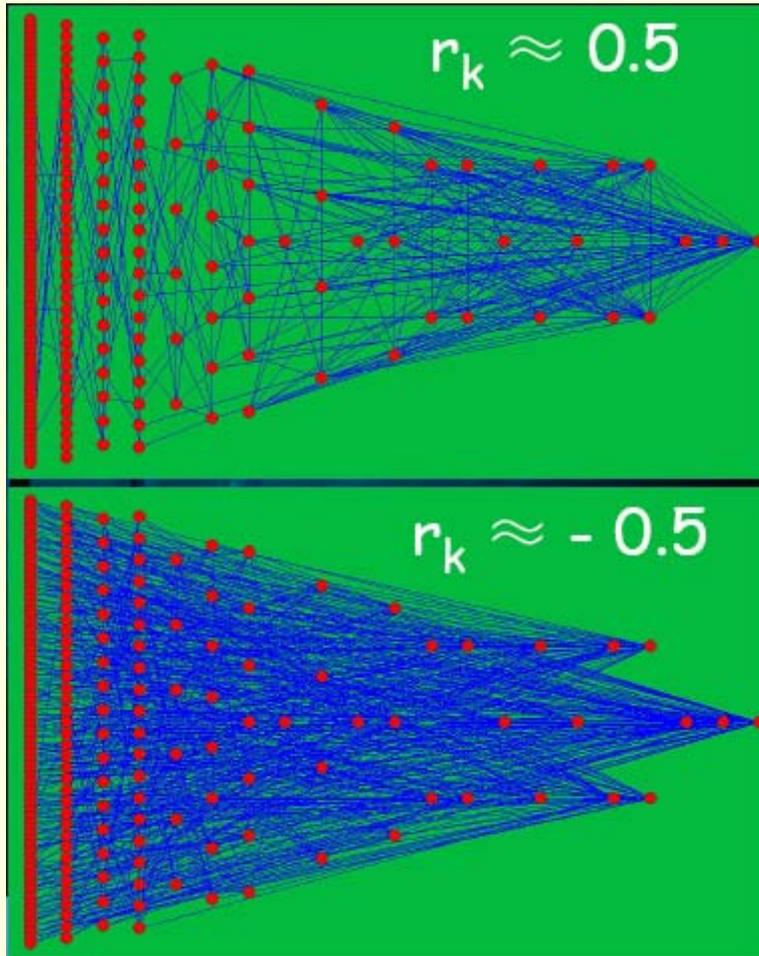
Дисассортативная сеть:  $e_{kk} < a_k b_k$   $r < 0$

Некоррелированная сеть:  $e_{lk} = a_l b_k$   $r = 0$

# ПРИМЕРЫ

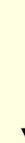
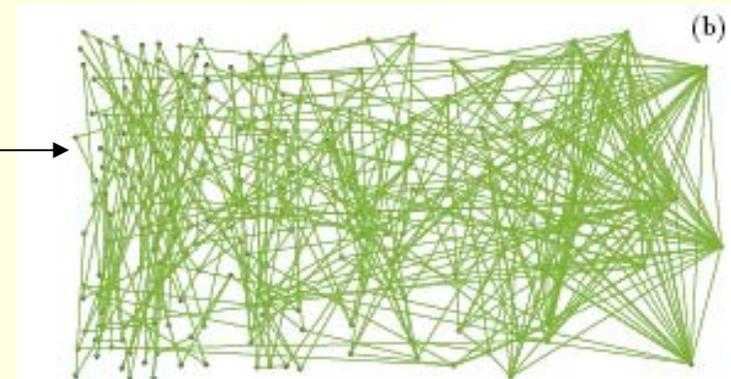
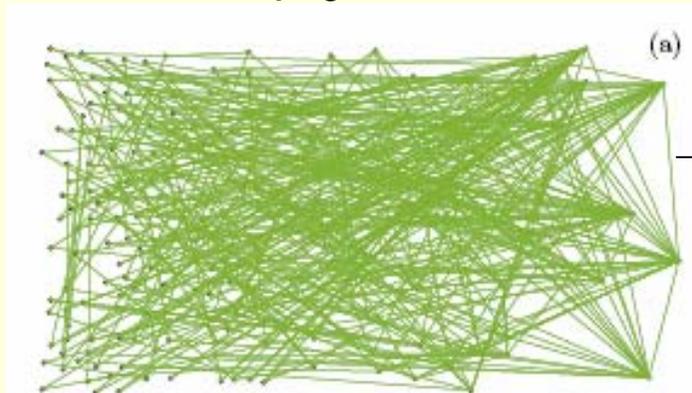
|               | Group | Network                   | Type       | Size $n$  | Assortativity $r$ | Error $\sigma_r$ |
|---------------|-------|---------------------------|------------|-----------|-------------------|------------------|
| Social        | a     | Physics coauthorship      | undirected | 52 909    | 0.363             | 0.002            |
|               | a     | Biology coauthorship      | undirected | 1 520 251 | 0.127             | 0.0004           |
|               | b     | Mathematics coauthorship  | undirected | 253 339   | 0.120             | 0.002            |
|               | c     | Film actor collaborations | undirected | 449 913   | 0.208             | 0.0002           |
|               | d     | Company directors         | undirected | 7 673     | 0.276             | 0.004            |
|               | e     | Student relationships     | undirected | 573       | -0.029            | 0.037            |
|               | f     | Email address books       | directed   | 16 881    | 0.092             | 0.004            |
| Technological | g     | Power grid                | undirected | 4 941     | -0.003            | 0.013            |
|               | h     | Internet                  | undirected | 10 697    | -0.189            | 0.002            |
|               | i     | World Wide Web            | directed   | 269 504   | -0.067            | 0.0002           |
|               | j     | Software dependencies     | directed   | 3 162     | -0.016            | 0.020            |
| Biological    | k     | Protein interactions      | undirected | 2 115     | -0.156            | 0.010            |
|               | l     | Metabolic network         | undirected | 765       | -0.240            | 0.007            |
|               | m     | Neural network            | directed   | 307       | -0.226            | 0.016            |
|               | n     | Marine food web           | directed   | 134       | -0.263            | 0.037            |
|               | o     | Freshwater food web       | directed   | 92        | -0.326            | 0.031            |

# иллюстрации



# ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕЙ С РАЗЛИЧНЫМ $r$

$r=0$



$r \sim 1$

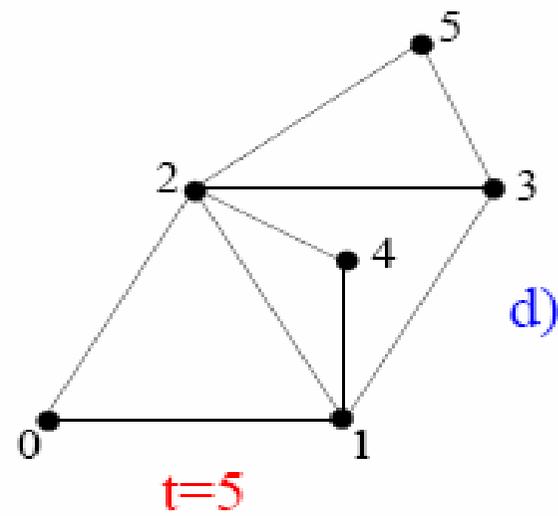
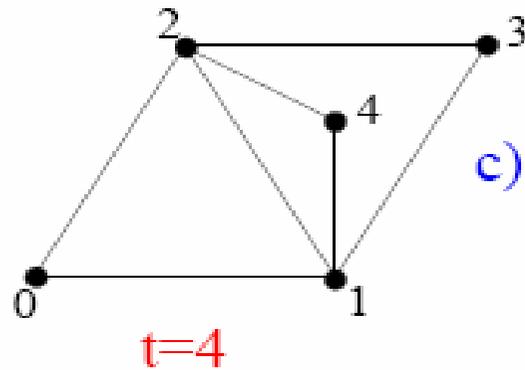
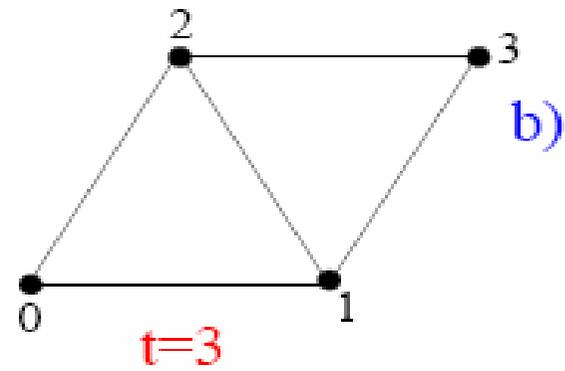
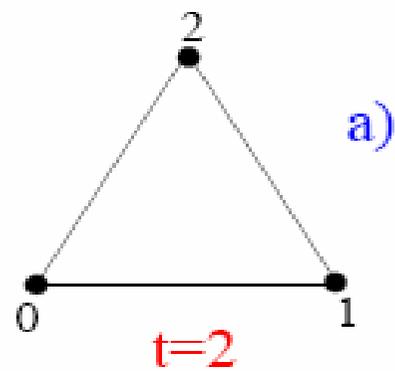
# ПОСТРОЕНИЕ СЕТИ

- построение начального кластера из  $m+1$  ( $m=20$ ) узлов, связанных «все со всеми» без «двойных» связей
- присоединение новых узлов по методу линейного преимущественного присоединения. Узел для присоединения выбирается с вероятностью

$$f(k_i, A) = (k_i + A) / \sum_i (k_i + A)$$

$A$  – варьируемый коэффициент

# построение сети. иллюстрация



# ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть  $k_s(t)$  обозначает число связей, имеющих в момент времени  $t$  у узла, рожденного в момент времени  $s$ . Заметим, что при присоединении к сети нового узла общее количество связей в сети увеличивается на величину  $2m$ , а число связей у узла под номером  $t$  в момент времени  $t$  равно  $m$ ,  $k_t(t) = m$ , тогда в континуальном по  $k$  приближении можно записать следующее уравнение для числа связей узла, рожденного в момент времени  $s$ :

$$\frac{dk_s(t)}{dt} = mf(k(s, T)) = m \frac{k_s(t) + A}{\int_0^t (k_s(t) + A) ds}, \quad (2)$$

что с учетом условия  $\int_0^t k_s(t) ds = 2mt$  дает:

$$\frac{dk_s(t)}{dt} = m \frac{k_s(t) + A}{(2m + A)t}. \quad (3)$$

Решение этого уравнения с граничным условием  $k_t(t) = m$  имеет вид:

$$k_s(t) = m \left(\frac{t}{s}\right)^\beta + A \left[\left(\frac{t}{s}\right)^\beta - 1\right], \beta = \frac{m}{2m + A}. \quad (4)$$

# ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Тогда для функции распределения  $P(k)$  имеем:

$$P(k) = \frac{1}{t} \int_0^t ds [k - k_s(t)], \quad (5)$$

где  $k_s(t)$  задается формулой (4).

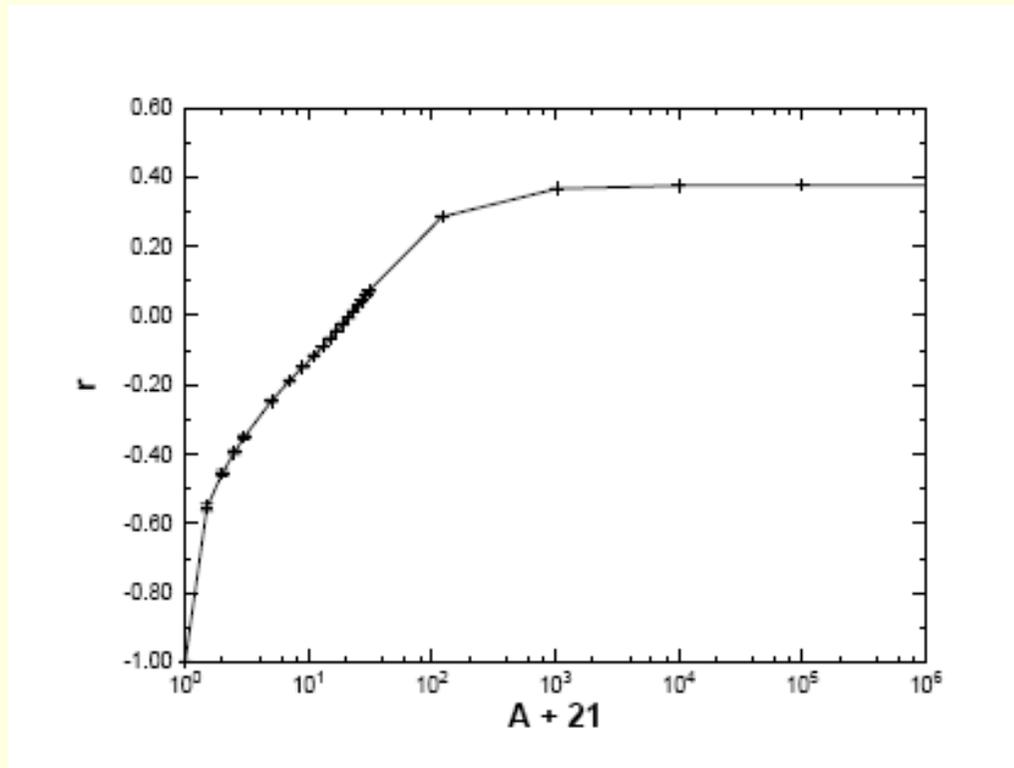
Вычисление данного интеграла для  $k > m$  дает:

$$P(k) = \frac{(2m + A)}{m(m + A)} \left[ \frac{m + A}{k + A} \right]^\gamma \theta(k - m), \quad \gamma = 3 + \frac{A}{m}$$

растущая, безмасштабная сеть

(Интернет, сеть телефонных контактов, сеть энергоснабжения и др.)

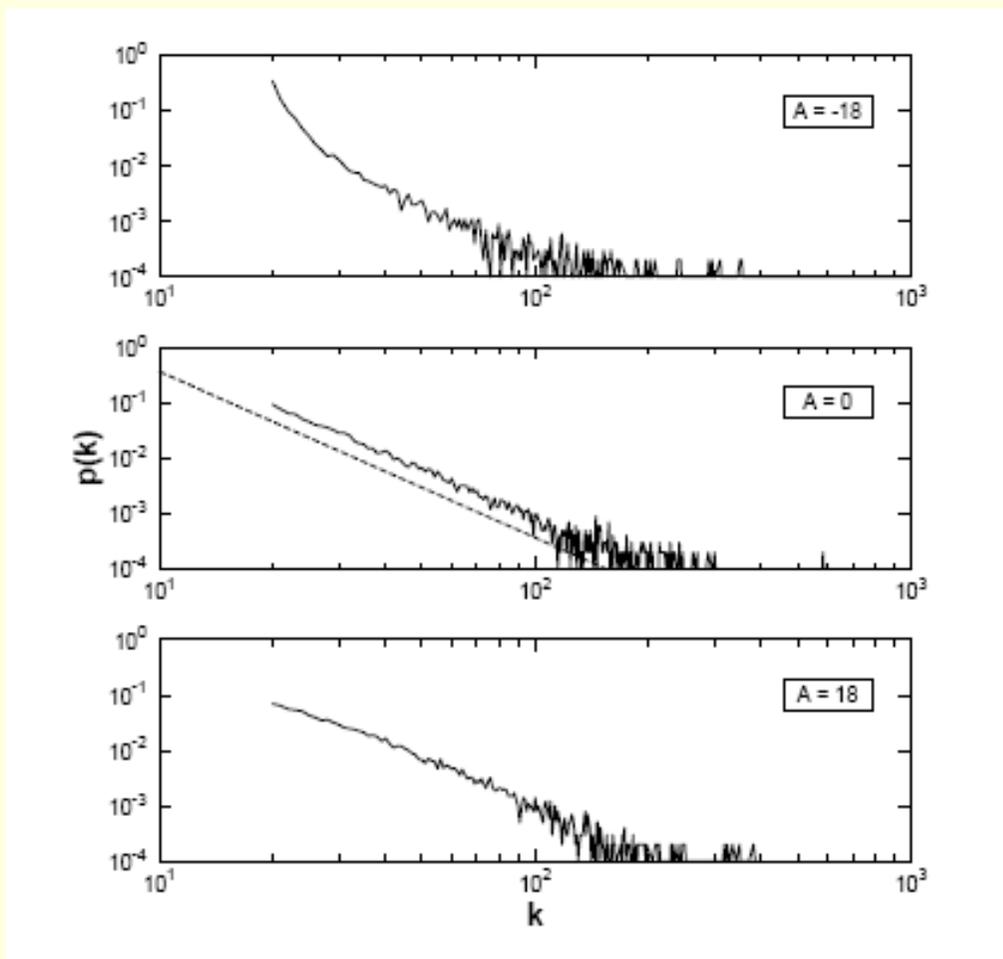
# ИЗУЧЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА АССОРТАТИВНОСТИ



## ***ВАЖНО!***

Меняя величину  $A$  мы получаем сети с различной величиной  $\gamma$  Простой и естественный способ в отличие от всех, используемых ранее, таких как модульное построение, перецепление связей.

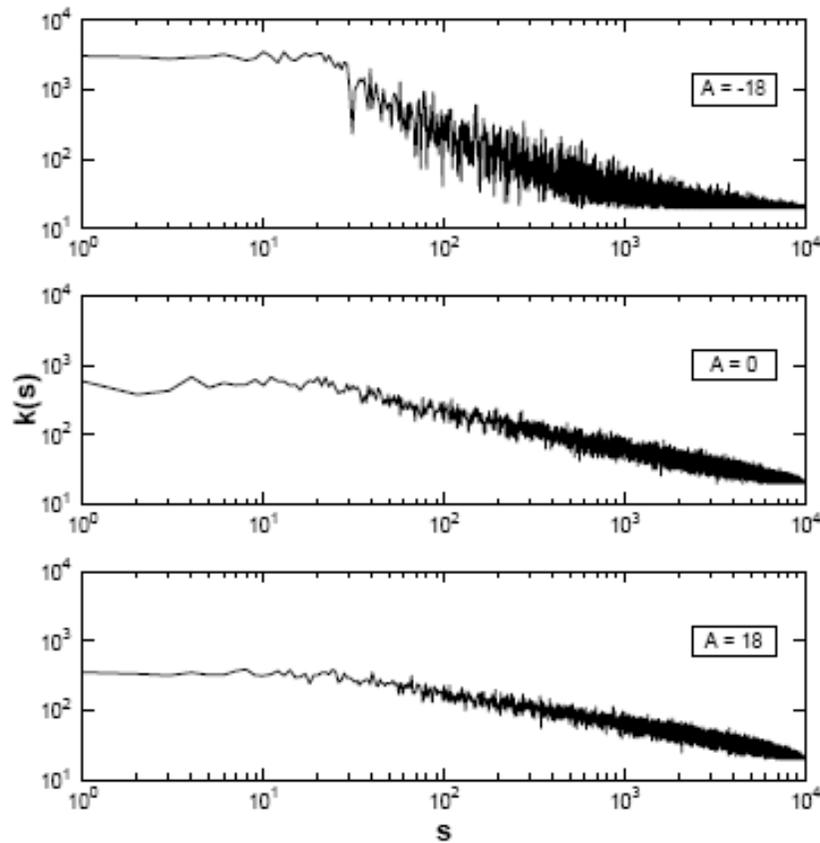
# функция распределения $k$



**ВАЖНО!**

Степенная аппроксимация справедлива для некоррелированной сети практически на всем интервале значений  $k$ , в ассортативном случае участок ее сужается, для дисассортативных сетей она невозможна.

# распределение $k(s)$



**ВАЖНО!**

Имеется очевидное различие в форме и «ширине» распределения

# НАУКА О СЕТЯХ

---

структура сети (это мы уже знаем!)

---



(почти никто не делал!)

---

динамика на сетях (можем узнать!)

# ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРЫ НА ДИНАМИКУ

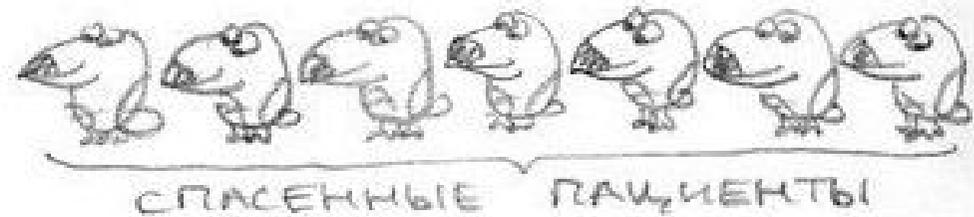
---

- «... поезд поедет лишь там, где проложен путь...»(с)

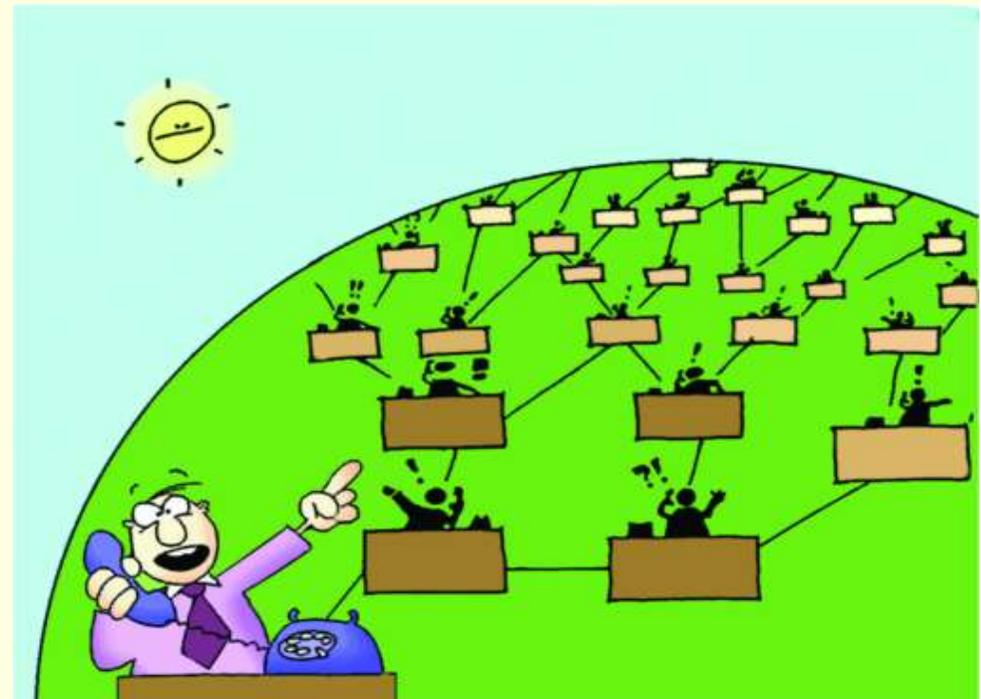


# ПРОСТАЯ ДИНАМИКА

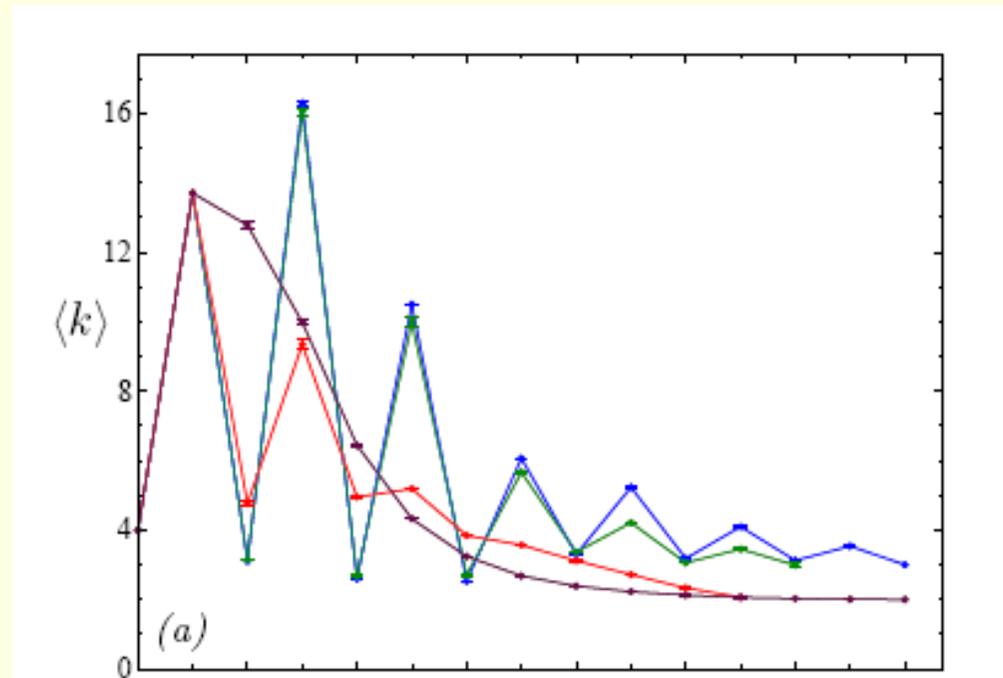
Динамика типа: «пациент либо жив, либо мертв»



- На каждом узле сети задана переменная  $z$ , которая может принимать значение 0 или 1. В начальный момент все  $z=1$
- В одном из узлов  $z$  становится равным 0. Возмущение распространяется по сети



# ТОМОГРАФИЯ СЕТИ



Осцилляции видны на дисассортативной сети. В случае некоррелированной и ассортативной сети – плавная функция.

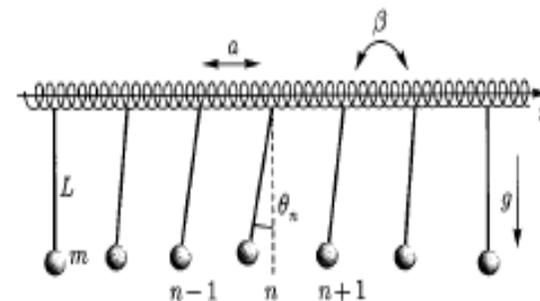
# ЛАВИНООБРАЗНАЯ ДИНАМИКА НА СЕТИ

## ■ Модель Френкеля-Конторовой

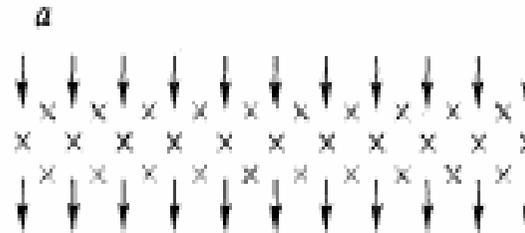
- потенциальная энергия

$$U = \sum_i [V(1 - \cos \varphi_i) - 2\pi F_i \varphi_i] + \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} (\varphi_i - \varphi_j)^2$$

механический аналог



СКВИДЫ



А также: волны зарядовой плотности, дислокации, цепочки ДНК и многое другое

# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

---

Уравнения

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial U(\varphi_i)}{\partial \varphi_i}$$

$$V \sin \varphi_i + \tau \frac{d\varphi_i}{dt} = \sum_j J_{ij} (\varphi_j - \varphi_i) + 2\pi F_i$$

$$J_{ij} = J_{ji} \quad \sum_j J_{ij} = k_i$$

# ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

---

$$V \gg 1 \quad z_i = \frac{V}{2\pi} \sin \varphi_i + \frac{\tau}{2\pi} \frac{d\varphi_i}{dt}$$

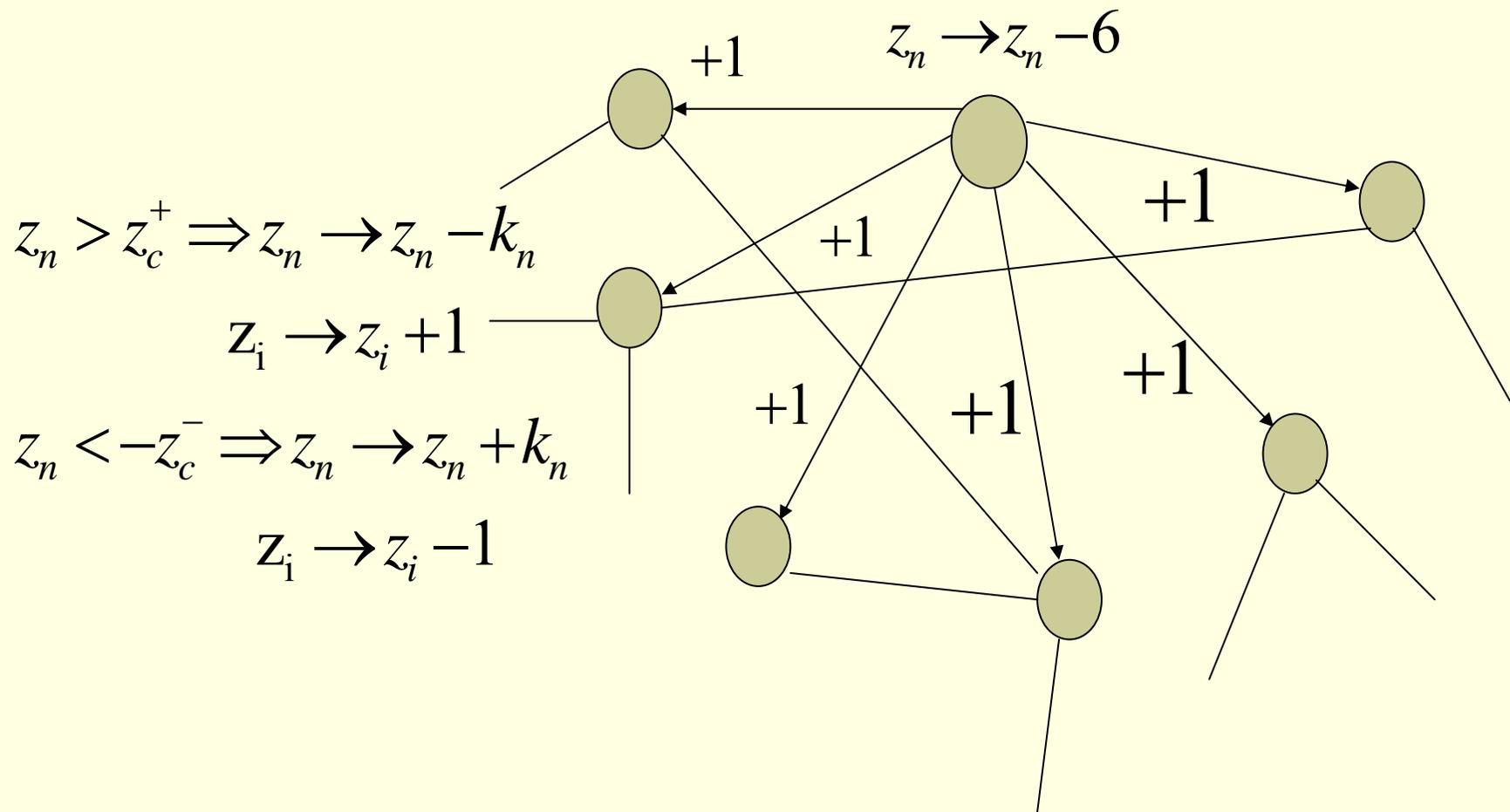
$$z_i(n+1) - z_i(n) = \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - k_i \Psi(z_i(n))$$

$$z_i(n+1) - z_i(n) = \sum_j J_{ij} \Psi(z_j(n)) - k_i \Psi(z_i(n))$$

$$+ [F_i(n+1) - F_i(n)]$$

$$\Psi(z_i) = \theta[z_i - z_c^+] - \theta[-z_i - z_c^-]$$

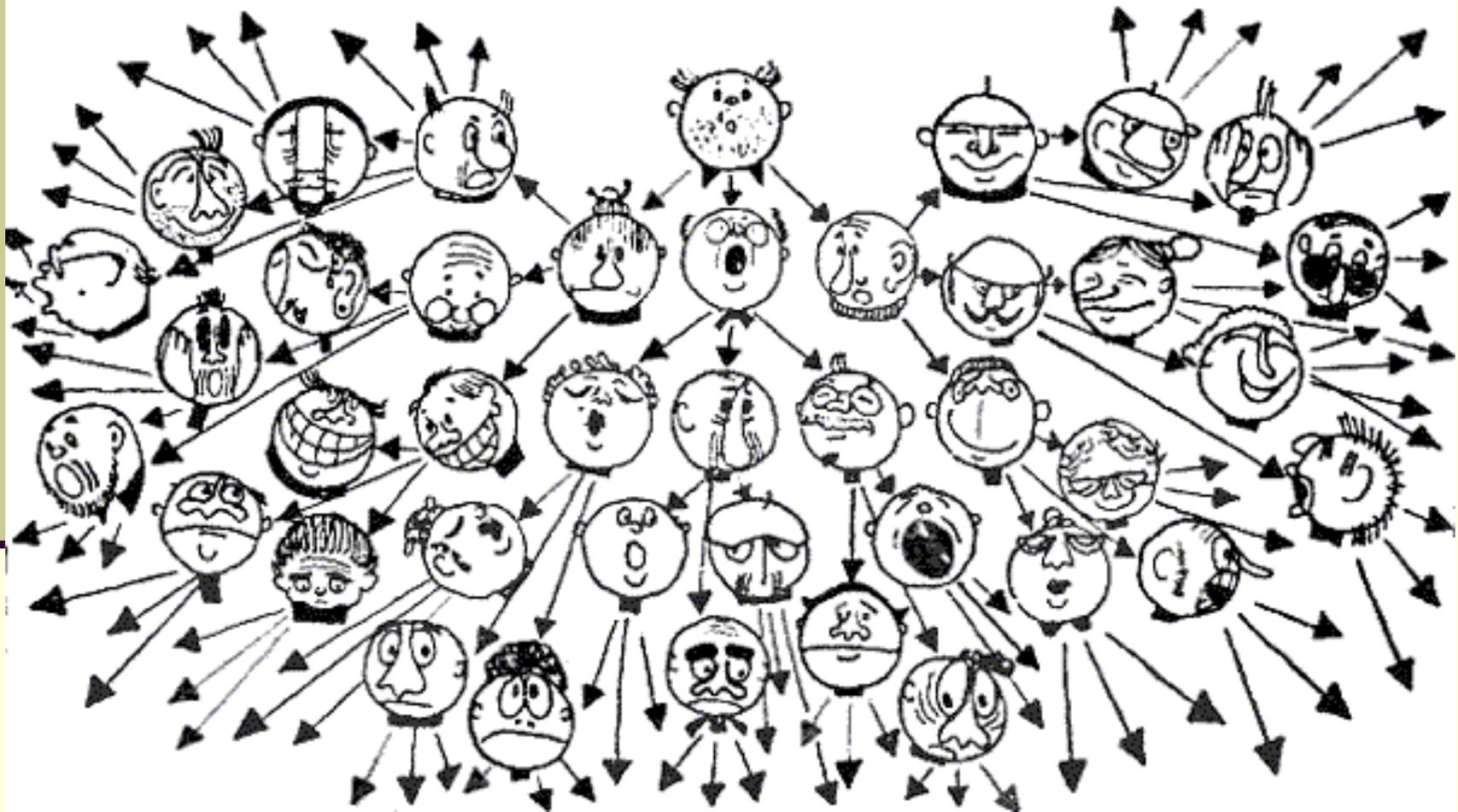
# АЛГОРИТМ



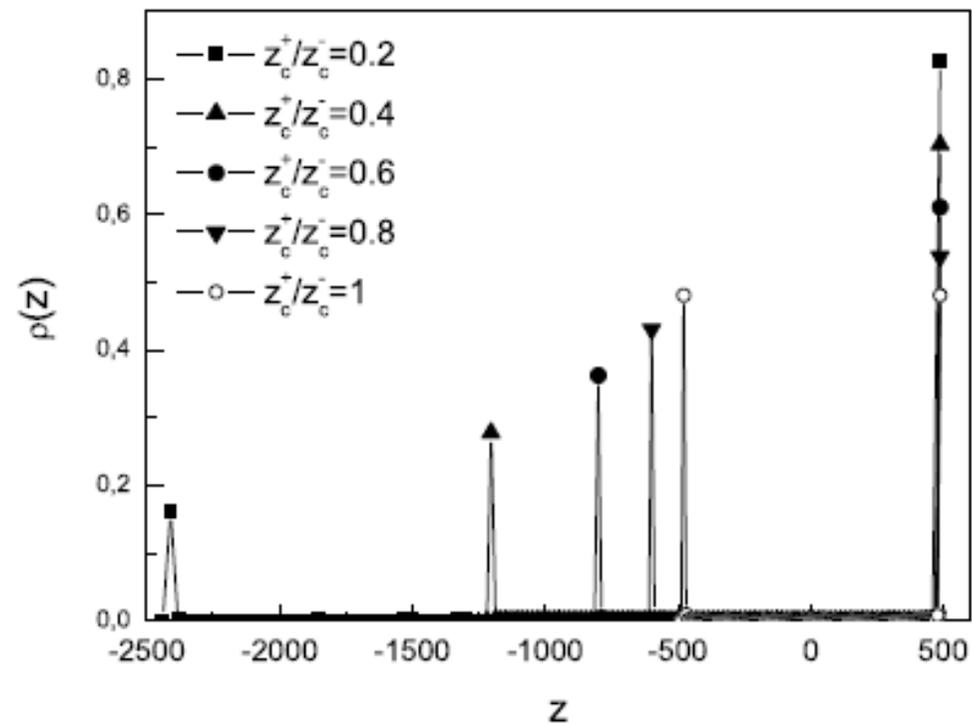
# ИЗУЧЕНИЕ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ НА ДИНАМИКУ

1. **Возмущение** системы проводилось в граничных точках. **Границей сети** мы называем узлы, в которых величина  $k$  (число связей, выходящих из каждого узла) равна величине  $m$  (число связей, с которым рождается каждый узел). Граница разделялась на два подмножества, «положительное» и «отрицательное». После этого перед каждым возмущением из подмножеств случайно выбиралось по одному узлу. В узел из «положительной» части добавлялась величина  $+\Delta h$ , из «отрицательной» –  $-\Delta h$ . Таким образом, суммарное добавление нулевое.
2. После каждого возмущения система **релаксировала** в состояние, где все  $-z_c^- < z_i < z_c^+$ . Затем возмущение проводилось вновь.

# ПРИМЕР

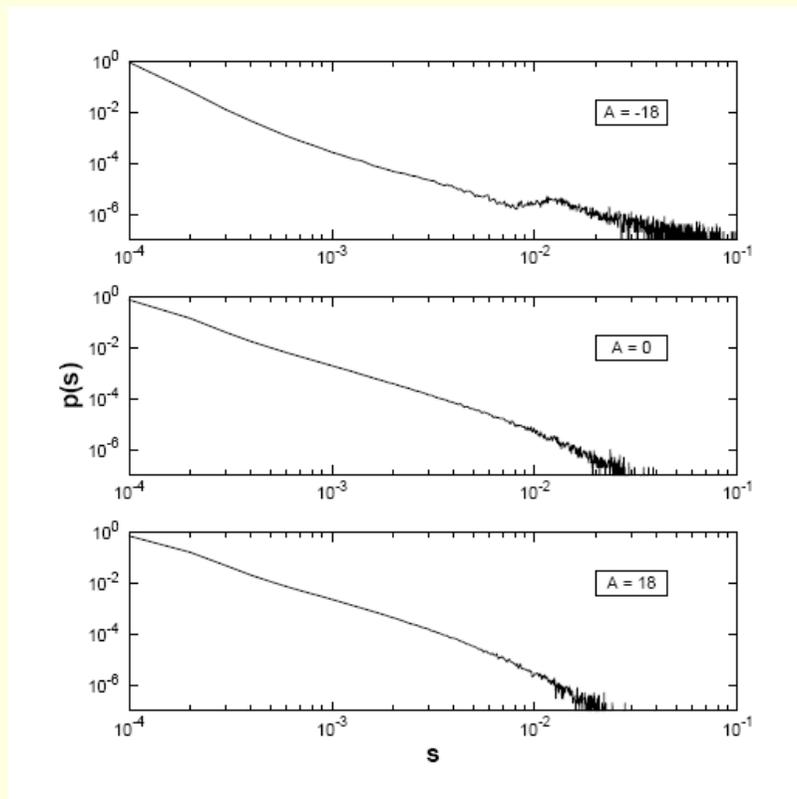


# критическое состояние



# функция распределения размеров лавин

$$s = \frac{1}{N} \sum_{i, n_a} \{ \theta[ z_i(n_a) - z_c^+ ] + \theta[ -z_i(n_a) - z_c^- ] \}$$



**ВАЖНО!**

Наличие «горба» в  
плотности вероятности  
говорит о влиянии  
структуры сети на  
динамику на ней  
«Горб»  $A = -16.0$

# одна лавина. профиль

- Будем характеризовать развитие лавины числом точек, вовлеченных в нее на каждом временном шаге

$$s(n_a) = \frac{1}{N} \sum_i \{ \theta[z_i(n_a) - z_c^+] + \theta[-z_i(n_a) - z_c^-] \}$$

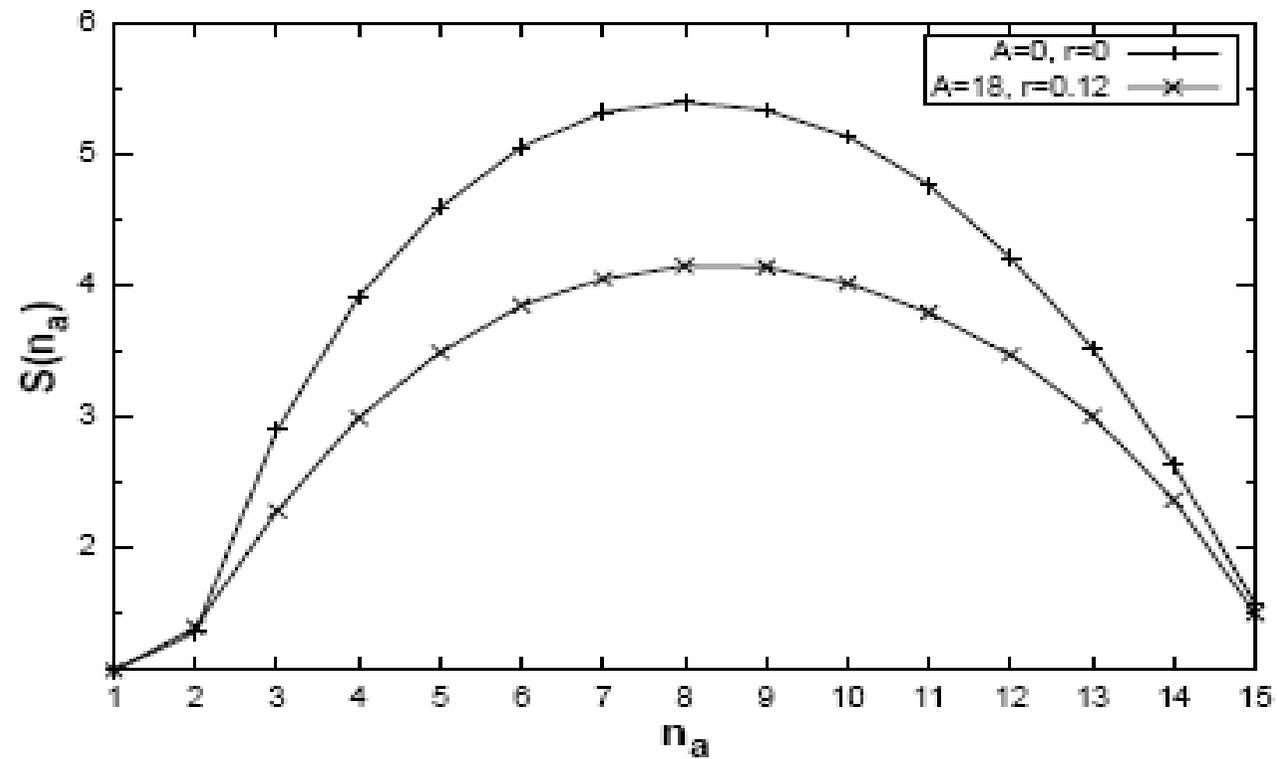
Далее выбираются все лавины длиной в  $L$  шагов производится усреднение:

$$S(n_a) = \frac{1}{N_{ava}} \sum_{a=1}^{N_{ava}} s_a(n_a)$$

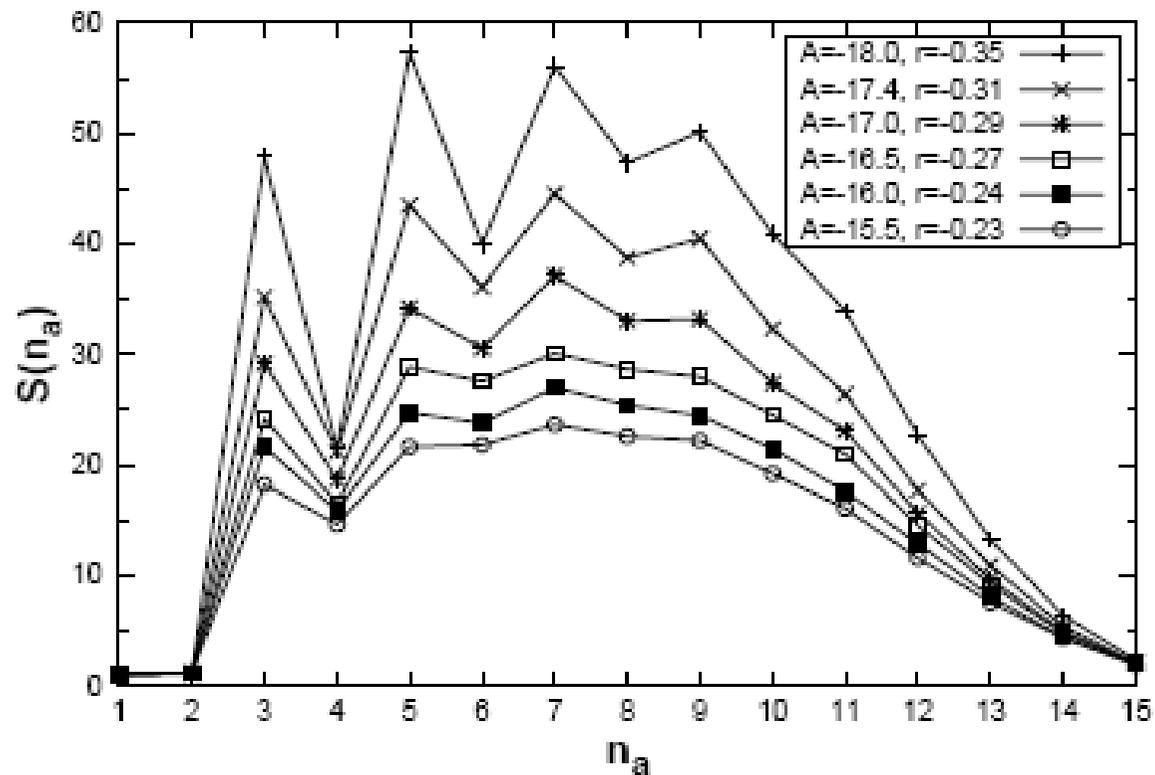
Это и есть «профиль» лавины

# ассортативная и некоррелированная сети

## сети



# дисассортативная сеть



# ЧЕМУ МЫ НАУЧИЛИСЬ?

---

- Теперь мы знаем:
  1. Что такое сложная сеть и можем привести примеры таких сетей в жизни
  2. Какие бывают количественные характеристики сети
  3. Чем ассортативная сеть отличается от дисассортативной и можем привести актуальные примеры

# И ТЕПЕРЬ МЫ МОЖЕМ

---

- запросто построить безмасштабную растущую сеть с заданным коэффициентом ассортативности.

# А ЧЕМУ ЖЕ МЫ ЕЩЕ НАУЧИЛИСЬ?

---

Из жизненного опыта мы знали, что структура сети влияет на динамику на ней, а теперь можем показать кому угодно, как это происходит на конкретном примере!

Мы знаем:

1. Одна из основных характеристик сети, определяющая свойства динамики на ней – степень ассортативности!

# МЫ МОЛОДЦЫ...

возьмем с полки пирожок!

