

СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

Д.Н. Аристов
ПИЯФ РАН

Школа ПИЯФ ФКС-2010

Спионовые волны = магноны
= элементарные возбуждения
в магнитоупорядоченных
кристаллах

план лекции

- спин, алгебра операторов
- обменное взаимодействие
- представление ДМ для спинов
- ФМ: ЛТСВ, взаимодействие магнонов
- АФМ: ЛТСВ, взаимодей.магн., 0-колебания
- анизотропия, внешнее поле

Спин, алгебра

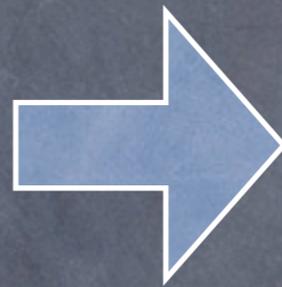
$$S^x, S^y, S^z$$

$$[A, B] = AB - BA$$

$$[S^x, S^y] = iS^z$$

$$[S^y, S^z] = iS^x$$

$$[S^z, S^x] = iS^y$$



$$[S^\alpha, S^\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}S^\gamma$$

алгебра $SU(2)$

величина спина – размерность
представления алгебры

Точнее, пока написана группа $SU(2)$.
Величина спина s и размерность N матрицы (представления) связаны как $N = 2s + 1$

Обменное взаимодействие

$$\mathcal{H} = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad \text{изотропный обмен}$$

$$\mathcal{H} = J_x S_1^x S_2^x + J_y S_1^y S_2^y + J_z S_1^z S_2^z$$

симметричный

$$\mathcal{H}_D = D_z (S_1^x S_2^y - S_1^y S_2^x)$$

асимметричный (Дзялош.-Мория)

Прямой обмен в квантовой механике имеет ФМ знак. АФМ знак обмена получается в результате косвенного обмена спинов через промежуточный немагнитный ион.

Асимметричный обмен и анизотропия возникают как релятивистские (а потому слабые) эффекты на фоне изотропного обмена. Они связаны с наличием спин-орбитального взаимодействия.

представление Дайсона-Малеева

Коммутация спиновых операторов дает опять спиновый оператор. Это приводит к тому, что анализ спиновой динамики становится крайне сложен. Бозонное представление имеет то преимущество, что бозе-операторы коммутируют на константу. Это дает возможность обсуждать спиновую динамику в терминах испускания (создания) и поглощения (уничтожения) бозона. И конечно, в терминах распространения бозона в большой системе спинов.

$$S_j^z = s - a_j^\dagger a_j$$

$$S_j^+ = \sqrt{2s} a_j$$

$$S_j^- = \sqrt{2s} \left(a_j^\dagger - \frac{1}{2s} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j \right)$$

$$S^\pm = S^x \pm iS^y$$

$$[S^+, S^-] = 2S^z$$

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm$$

Бозе-операторы
 $[a, a^\dagger] = 1$

представление Дайсона-Малеева 2

- точное воспроизведение комм.соотн.
- наличие нефизических состояний ($|S^z| > s$)
- хорошее описание спиновой динамики при низких температурах, когда флуктуации невелики

Нефизические состояния неважны, если температуры много меньше температуры упорядочения спинов. Когда температура достаточно высока, то представление ДМ не работает, как впрочем и любое другое представление, в силу сложности учета флуктуаций.

Гольштейн-Примаков
нефизич.сост. недостижимы

$$S_j^z = s - a_j^\dagger a_j$$
$$S_j^+ = \sqrt{(2s - a_j^\dagger a_j) a_j}$$
$$S_j^- = a_j^\dagger \sqrt{(2s - a_j^\dagger a_j)}$$

Ферромагнетик

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad J > 0$$

ВСЕ СПИНЫ $\vec{S}_j \parallel \hat{z}$ $\langle S_j^z \rangle = \langle s - a_j^\dagger a_j \rangle \rightarrow s$

$$\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = (s - a_1^\dagger a_1)(s - a_2^\dagger a_2)$$

$$+ s \left(a_1^\dagger - \frac{1}{2s} a_1^\dagger a_1^\dagger a_1 \right) a_2$$
$$+ s \left(a_2^\dagger - \frac{1}{2s} a_2^\dagger a_2^\dagger a_2 \right) a_1$$

Еще одна особенность представления ДМ - неэрмитовость. Это видно в гамильтониане на уровне членов $1/s$ взаимодействия и формально соответствует несимметрии по отношению к обращению времени. Однако, было показано, что возможные эффекты необратимости не проявляются при анализе физически наблюдаемых величин.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= J \sum_{\langle ij \rangle} \left[-s^2 + s(a_i^\dagger - a_j^\dagger)(a_i - a_j) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(a_i^\dagger - a_j^\dagger)(a_i^\dagger - a_j^\dagger)a_i a_j \right] \\
&= -\frac{1}{2} J s^2 N z + J s z \sum_k (1 - \gamma_k) a_k^\dagger a_k \\
&\quad + \frac{J s z}{2s} \sum_{kqp} \Phi(k, q) a_k^\dagger a_q^\dagger a_p a_{k+q-p}
\end{aligned}$$

z – число ближайших соседей

$$\gamma_k = z^{-1} \sum_a e^{i\vec{k}\vec{a}} \simeq 1 - k^2 \mathcal{O}(1)$$

$$\Phi(k, q) = \frac{1}{N} (\gamma_{k+q-p} + \gamma_p - \gamma_{k-p} - \gamma_{q-p})$$

N - общее число спинов, фактор $1/2$ перед классической энергией происходит из-за суммирования по связям, число которых $zN/2$

$-\frac{1}{2} J s^2 N z$ = классическая энергия
магнетика

$$J s z \sum_k (1 - \gamma_k) a_k^\dagger a_k = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

$$\epsilon_k \sim k^2 > 0$$

линейная теория
СПИНОВЫХ ВОЛН

$$\frac{1}{2s} \sum_{q_i} a_{q_1}^\dagger a_{q_2}^\dagger a_{q_3} a_{q_4} \mathcal{O}(\epsilon_{q_i})$$

взаимодействие магнонов
1/s разложение

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(k, \omega) &= \langle S_k^x S_{-k}^x \rangle_\omega \\ &= \frac{s}{2} \langle (a_k + a_{-k}^\dagger)(a_{-k} + a_k^\dagger) \rangle_\omega \\ &= \frac{s/2}{\omega - \varepsilon_k} + \frac{s/2}{-\omega - \varepsilon_k} \\ &= \frac{s\varepsilon_k}{\omega^2 - \varepsilon_k^2}\end{aligned}$$

Полюсная структура восприимчивости говорит о резонансах и линиях поглощения высокочастотного поля. (Поглощение есть мнимая часть восприимчивости, мнимая часть полюса есть дельта-функция.) Энергия магнона есть частота ФМ резонанса.

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(k, \omega) &= \langle S_k^x S_{-k}^x \rangle_\omega \\ &= \frac{S \epsilon_k}{\omega^2 - \epsilon_k^2} \\ &= \frac{1}{Jz(1 - \gamma_k)} \sim \frac{1}{k^2}, \quad \omega = 0\end{aligned}$$

$$\epsilon_k \sim k^2$$

$$\chi_{xx}(k = 0, \omega \neq 0) = 0$$

сохранение полного спина

$1/k^2$ особенность есть общее свойство восприимчивости «мягкой» системы, где параметр порядка не стабилизирован «жесткими» взаимодействиями типа анизотропии обмена (см.ниже).

Коммутация полного (суммарного) спина системы с изотропным гамильтонианом показывает, что полный спин не имеет характерной частоты прецессии. Поэтому отклик на однородное поле конечной частоты отсутствует.

Антиферромагнетик

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \quad J > 0$$

все спины $\vec{S}_j \parallel \hat{z}$ но 2 подрешетки

$$S_j^z = s - a_j^\dagger a_j, \quad S_j^+ = \sqrt{2s} a_j$$

$$S_j^- = \sqrt{2s} \left(a_j^\dagger - \frac{1}{2s} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j \right) \quad j \in \mathcal{A}$$

$$j \in \mathcal{B} \quad S_j^z = -s + a_j^\dagger a_j, \quad S_j^+ = \sqrt{2s} a_j^\dagger$$

$$S_j^- = \sqrt{2s} \left(a_j - \frac{1}{2s} a_j^\dagger a_j a_j \right)$$

Классические значения спинов «s» в подрешетках противоположны.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= J \sum_{\langle ij \rangle} \left[-s^2 - s + s(a_i^\dagger + a_j)(a_i + a_j^\dagger) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} a_j^\dagger (a_i^\dagger + a_j)(a_i^\dagger + a_j) a_i \right] \\
&= -J(s^2 + s)Nz \\
&\quad + Js z \sum_k [(1 + \gamma_k)P_k P_{-k} \\
&\quad + (1 - \gamma_k)Q_k Q_{-k}] \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

класс.
ЭН.

ЛТСВ

1/s ВЗ.

N-число спинов в
 подрешетке, т.о. полное
 число спинов = 2N.
 Суммирование по k
 происходит по
 химической зоне
 Бриллюэна

Для простоты, мы не выписываем 1/s
 члены явно. Детальный анализ
 показывает, что их влияние на
 спектры и восприимчивости в случае
 изотропного магнетика
 незначительно.

ЛТСВ

Такая форма записи гамильтониана показывает сходство с акустическими фононами, где P соответствует импульсу иона, а Q его смещению. Аналогия была бы полной, если бы коэффициенты перед PP был бы константой (пропорциональной обратной массе иона). Т.о. АФМ магноны похожи во многих смыслах на систему связанных квантовых осцилляторов. Отсюда также можно (но не очень нужно) перейти к действию Клейна-Гордона и нелинейной сигма-модели.

$$\mathcal{H}_2 = Jsz \sum_k [(1 + \gamma_k) P_k P_{-k} + (1 - \gamma_k) Q_k Q_{-k}]$$

$$P_k = (a_k^\dagger + a_{-k}) / \sqrt{2}$$

$$Q_k = i(a_k - a_{-k}^\dagger) / \sqrt{2}$$

$$[P_k, Q_q] = i\delta(k + q)$$

$$\frac{d}{dt} P_k = -i[P_k, \mathcal{H}_2] = Jsz(1 - \gamma_k) Q_k$$

$$\frac{d}{dt} Q_k = -i[Q_k, \mathcal{H}_2] = -Jsz(1 + \gamma_k) P_k$$

$$\frac{d^2}{dt^2} P_k = -\omega_k^2 P_k$$

$$\omega_k^2 = (Jsz)^2 (1 - \gamma_k^2)$$

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ 1

$$S_k^x = \sqrt{s} P_k$$

$$S_k^y = \sqrt{s} Q_{k+q_{AF}}$$

$$q_{AF} = (\pi/a, \pi/a, \pi/a)$$

$$\begin{aligned} \chi_{xx}(k, \omega) &= \langle S_k^x S_{-k}^x \rangle_\omega \\ &= s \langle P_k P_{-k} \rangle_\omega \end{aligned}$$

Связь компонента спина с величинами P и Q проясняет, в частности, ряд свойств компонента динамической восприимчивости.

Написано для 3-мерного кристалла. Для слоистой АФМ системы мы, конечно, напишем 2-мерный вектор.

Далее мы приводим краткий вывод поперечной запаздывающей восприимчивости в линейной спин-волновой теории (ЛСВТ).

Обращаем внимание, что на первом этапе дифференцирование функции скачка ничего не дает, поскольку P коммутирует сам с собой. При втором дифференцировании мы возвращаемся к исходной величине и получаем дополнительное слагаемое.

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ 2

$$\begin{aligned}\chi_{xx}(k, t) &= -i\theta(t) \langle [S_k^x(t), S_{-k}^x] \rangle \\ &= -is\theta(t) \langle [P_k(t), P_{-k}] \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \chi_{xx}(k, t) &= -is\theta(t) \langle [\frac{d}{dt} P_k(t), P_{-q}] \rangle \\ &= -is\theta(t) \langle [Js z(1 - \gamma_k) Q_k(t), P_{-q}] \rangle\end{aligned}$$

← сначала волновые вектора k и q предполагаются различны...

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \chi_{xx}(k, t)}{dt^2} &= -is\theta(t) \langle [Js z(1 - \gamma_k) \frac{d}{dt} Q_k(t), P_{-q}] \rangle \\ &\quad - is\delta(t) \langle [Js z(1 - \gamma_k) Q_k, P_{-q}] \rangle \\ &= is\theta(t) \langle [\omega_k^2 P_k(t), P_{-q}] \rangle - Js^2 z(1 - \gamma_k) \delta_{k-q}\end{aligned}$$

... но теперь они совпали!

ВОСПРИИМЧИВОСТЬ 3

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_k^2\right) \chi_{xx}(k, t) = -Js^2 z(1 - \gamma_k)$$

$$\chi_{xx}(k, \omega) = \frac{Js^2 z(1 - \gamma_k)}{\omega^2 - \omega_k^2}$$

$$\chi_{xx}(k, \omega = 0) = \frac{1}{Jz(1 + \gamma_k)}$$

$$= (2Jz)^{-1}, \quad k = 0$$

$$\sim J^{-1}(\vec{k} - \vec{q}_{AF})^{-2}, \quad k \simeq q_{AF}$$

Поперечная (xx) статическая восприимчивость не зависит от величины спина, а значит практически не зависит от температуры, в согласии с экспериментом ниже T Нееля.

$$\chi_{xx}(k = 0, \omega \neq 0) = 0$$

Опять видим $1/k^2$ расходимость и нулевую реакцию на однородное поле конечной частоты

Сравнение ФМ и АФМ

ФМ: $\epsilon_k = 2Jsz(1 - \gamma_k) \sim Jsk^2$

АФМ: $\omega_k = 2Jsz(1 - \gamma_k^2)^{1/2} \sim Jsk$

ФМ: однородная намагн.

замыкание уравн. движения на 1-м шаге

АФМ: намагн. на АФ векторе

замыкание ур. движения на 2м шаге

Разница в характере дисперсии на малых волновых векторах технически обусловлена необходимостью второго дифференцирования по времени для замыкания ур.движ. в АФМ случае. На более простом уровне анализа, в духе уравнений Ландау-Лифшица для АФМ, необходимость второго шага следует из того, что прецессия однородной намагниченности происходит относительно разностного вектора намагниченности подрешеток, который является полярным вектором. В этом отличие от ФМ случая, где прецессия происходит относительно вектора однородной намагниченности - аксиального вектора.

нулевые колебания

$$\langle S_l^z \rangle = s - \langle a_l^\dagger a_l \rangle$$

флукт.-диссип. теорема

$$T = 0$$

Квантовое среднее связывается с мнимой частью восприимчивости, проинтегрированной по энергии со статистическим весом (функция Планка).
Формулу поленился выписывать - см. учебники.

Флуктуации существуют даже при нуле температур. Отсюда традиционное название «нулевые колебания». Кстати, термин возник при обсуждении фононов, где слово «колебания» имеет прямой смысл. В АФМ иногда используют термин «квантовое сокращение спина».

ФМ: $\langle a_l^\dagger a_l \rangle = 0$

АФМ: $\langle a_l^\dagger a_l \rangle = \sum_k \frac{Jsz - \omega_k}{2\omega_k} > 0$

2D AF Heisenberg, NN $\langle a_l^\dagger a_l \rangle \simeq 0.2$

Это довольно много, ведь для спина $s=1/2$ это около 40% сокращения длины спина. Однако же, ЛСВТ отлично работает даже в этом случае !!

анизотропия

ФМ: $\mathcal{H} = - \sum_{ij} (J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \delta J_z S_i^z S_j^z)$

АФМ: $\mathcal{H} = \sum_{ij} (J \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \delta J_z S_i^z S_j^z)$

легкая ось: $\delta J_z > 0$

Анализ всех типов анизотропии был бы слишком утомителен. Ниже приводятся наиболее простые случаи, на их примере виден общий рецепт анализа в ЛСВТ. Традиционные названия «легкая ось», «легкая плоскость» определяются тем, в каком направлении легче намагнитить образец.

анизотр. - ФМ

$$-\delta J_z S_i^z S_j^z = -\delta J_z (s - a_i^\dagger a_j)(s - a_j^\dagger a_j)$$
$$\rightarrow -\frac{1}{2}\delta J_z s^2 z N + \delta J_z s z \sum_k a_k^\dagger a_k$$

$$-g\mu H \sum_j S_j^z \rightarrow -g\mu H s N + g\mu H \sum_k a_k^\dagger a_k$$

ЛТСВ $\sum_k \varepsilon_k a_k^\dagger a_k$

$$\varepsilon_k = \delta J_z s z + g\mu H + J s z (1 - \gamma_k) \simeq \Delta + J k^2$$

То новое, что возникло - это щель в спектре магнонов при $k=0$. Видно что щель в случае сонаправленности поля и легкой оси определяется их суммой. Ясно также, что в случае разнонаправленности - возможна формально отрицательная щель, что отвечает неустойчивости возникающего состояния и последующей спонтанной переориентации спиновой системы.

анизотр. – АФМ

$$\begin{aligned}\delta J_z S_i^z S_j^z &= \delta J_z (s - a_i^\dagger a_j) (-s + a_j^\dagger a_j) \\ &\rightarrow -\delta J_z s^2 z N + \delta J_z s z \sum_k a_k^\dagger a_k \\ &\rightarrow \delta J_z s z \sum_k (P_k P_{-k} + Q_k Q_{-k})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta J_y S_i^y S_j^y &= s \delta J_y (a_i^\dagger - a_i) (-a_j^\dagger + a_j) \\ &\rightarrow -\delta J_y s z \sum_k \gamma_k Q_k Q_{-k}\end{aligned}$$

$$\delta J_z \geq \delta J_y \geq 0$$

В АФМ случае полезно сразу рассмотреть случай «трехосной» анизотропии, откуда получаются случаи «легкой оси» вдоль «z» ($dJ_y = 0$) и «легкой плоскости» вдоль «x» ($dJ_z = dJ_y > 0$)

анизотр. – АФМ

в изотропном случае:

$$\mathcal{H}_2 = Jsz \sum_k [(1 + \gamma_k)P_k P_{-k} + (1 - \gamma_k)Q_k Q_{-k}]$$

теперь получаем:

$$\mathcal{H}_2 = sz \sum_k [(J + \delta J_z + J\gamma_k)P_k P_{-k} + (J + \delta J_z - (J + \delta J_y)\gamma_k)Q_k Q_{-k}]$$

анизотр. – АФМ

$$\mathcal{H}_2 = sz \sum_k [(J + \delta J_z + J\gamma_k)P_k P_{-k} + (J + \delta J_z - (J + \delta J_y)\gamma_k)Q_k Q_{-k}]$$

$$\omega_k^2 = (Jsz)^2 \left(1 + \frac{\delta J_z}{J} + \gamma_k\right) \times \left(1 + \frac{\delta J_z}{J} - \left(1 + \frac{\delta J_y}{J}\right)\gamma_k\right)$$

$$\Delta_1^2 = \omega_0^2 \simeq J(\delta J_z - \delta J_y)$$

$$\Delta_2^2 = \omega_{q_{AF}}^2 \simeq J\delta J_z$$

в случае «легкой плоскости» $dJ_z = dJ_y$ и значит первая щель обращается в ноль

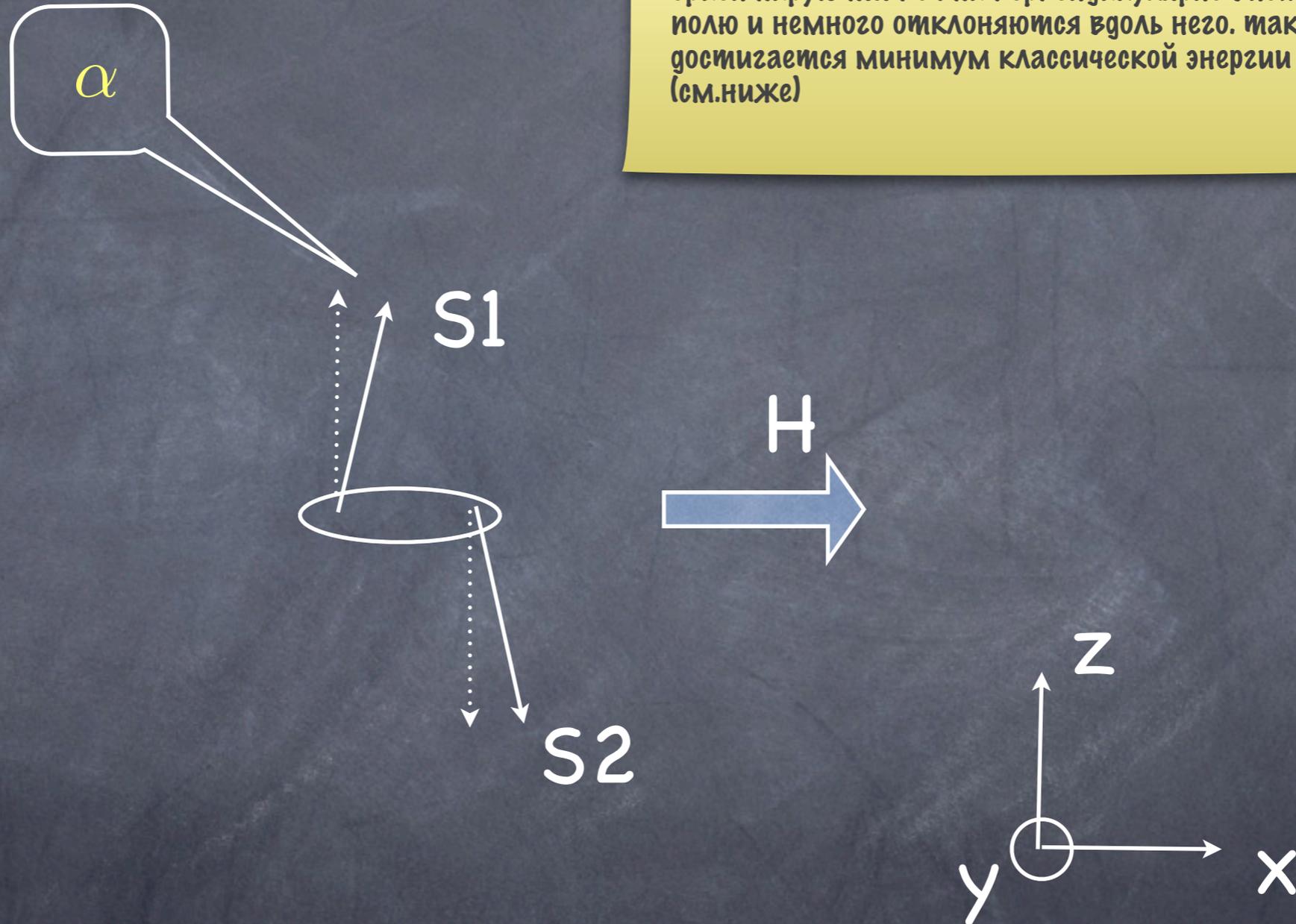
Читатель может повторить вывод выражений для восприимчивости компоненты спина S_x и S_y , теперь с анизотропией. Рекомендуется обратить внимание на то, что

1) однородная восприимчивость при конечных частотах теперь не 0, она обнуляется только в случае легкой плоскости вдоль «х» и восприимчивости S_x , когда работает закон сохранения «х» компоненты полного спина.

2) в случае «легкой плоскости» щель наблюдается для компоненты S_y при $k=0$, а для компоненты S_x - вблизи АФМ вектора. Предполагаем случай ближайших соседей на кубической решетке, когда $g_{\text{шита}}=1$ при $k=0$ и $g_{\text{шита}}=-1$ при $k=q_{AF}$

внешнее поле, АФМ

В магнитном поле спины в изотропном АФМ ориентируются почти перпендикулярно внешнему полю и немного отклоняются вдоль него. так достигается минимум классической энергии (см.ниже)



Для удобства записи, мы сменили знак в обычном определении члена с магнитным полем

$$J\vec{S}_1\vec{S}_2 - H(S_1^x + S_2^x)$$

Теперь локальная ось квантования (равновесное направление спина) не совпадает с декартовыми осями и приходится это учесть в явном виде.

Запишем выражения для компонент спина в ДМ представлении, откинем члены содержащие степень бозонов выше двух - старшие степени не дадут вклад в ЛТСВ, а только во взаимодействие.

$$S_j^z = \cos \alpha (s - a_j^\dagger a_j) - \sin \alpha (a_j^\dagger + a_j) \sqrt{s/2}$$

$$S_j^x = \sin \alpha (s - a_j^\dagger a_j) + \cos \alpha (a_j^\dagger + a_j) \sqrt{s/2}$$

$$S_j^y = i(a_j^\dagger - a_j) \sqrt{s/2}$$

$j \in \mathcal{A}$

$$S_j^z = \cos \alpha (-s + a_j^\dagger a_j) + \sin \alpha (a_j^\dagger + a_j) \sqrt{s/2}$$

$$S_j^x = -\sin \alpha (-s + a_j^\dagger a_j) + \cos \alpha (a_j^\dagger + a_j) \sqrt{s/2}$$

$$S_j^y = -i(a_j^\dagger - a_j) \sqrt{s/2}$$

$j \in \mathcal{B}$

Предположим некий угол отклонения подрешеток, вычислим сумму энергий обмена и в поле. Затем найдем значение угла при котором достигается минимум классической энергии.

$$\mathcal{H} = J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \vec{S}_j - H \sum_j S_j^x$$

напомним, что общее
число спинов = $2N$

класс.
ЭН.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & N(-Jzs^2 \cos 2\alpha - 2Hs \sin \alpha) \\ & + \sum_j (a_j + a_j^\dagger)(Jzs \sin 2\alpha - H \cos \alpha) \sqrt{(s/2)} \\ & + \sum_k [(P_k P_{-k} + Q_k Q_{-k})(Jsz \cos 2\alpha + H \sin \alpha) \\ & + Js z \gamma_k (P_k P_{-k} \cos 2\alpha - Q_k Q_{-k})] \end{aligned}$$

$$\frac{dE_{cl}}{d\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2Jsz \sin \alpha = H$$

Мы видим, что вычисленная выше в ЛТСВ однородная восприимчивость появляется уже на уровне вариации классического действия. Это общее свойство для квазиклассического подхода, см. ниже.

$$\langle S_x \rangle = s \sin \alpha = (2Jz)^{-1} H = \chi_{xx} H$$

$$E_{cl} \sim -\frac{1}{2} Jzs^2 - \frac{1}{2} \chi_{xx} H^2$$

линейные члены по магнонам исчезают!

Исчезновение линейных по бозонам a_j членов в гамильтониане при достижении минимума классического действия в вариационной процедуре - неслучайно. Это показывает, что наш метод в целом соответствует квазиклассическому подходу, при этом квадратичный спин-волновой гамильтониан (ЛСВТ) возникает как квантованное поле флуктуаций возле классического минимума действия.

$$\mathcal{H}_2 = Jsz \sum_k [P_k P_{-k} (1 + \cos 2\alpha \gamma_k) + Q_k Q_{-k} (1 - \gamma_k)]$$

$$\begin{aligned} \omega_k &= Jsz \sqrt{(1 + \cos 2\alpha \gamma_k)(1 - \gamma_k)} \\ &\sim k, \quad k \rightarrow 0 \\ &\sim \sqrt{H^2 + (k - q_{AF})^2}, \quad k \rightarrow q_{AF} \end{aligned}$$

интересно, что в сильном поле полный разворот АФМ спинов по полю, $\alpha = \pi/2$, соответствует квадратичной дисперсии ФМ типа

заключение

Главное, что следует запомнить:

ФМ:

$$\epsilon_k \sim k^2$$

АФМ:

$$\omega_k \sim k$$